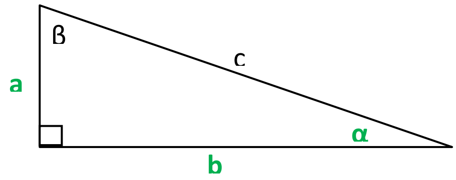
Priprema za ispit znanja – trigonometrija pravokutnog trokuta

1. Zbroj duljina kateta pravokutnog trokuta jednak je 12 cm, jedan kut trokuta iznosi 58^o. Kolika je duljina hipotenuze ovog trokuta?

a + b = 12
α = 58^o
c = ?



S obzirom da se u zadanim podacima pojavljuju katete a i b te kut α, uočimo te elemente na skici pravokutnog trokuta i odaberimo trigonometrijsku funkciju koja ih povezuje (naravno, radi se o tangensu jer su obe stranice katete – nema hipotenuze):

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Ako pomnožimo cijelu jednadžbu s b dobijemo:

$$a = b \cdot \tan\alpha$$

Problem je što se pojavljuju dvije nepoznanice, pa gornju jednadžbu moramo kombinirati s već dobivenom a + b = 12:

$$\begin{cases} a = b \cdot \tan\alpha \\ a + b = 12 \end{cases}$$

Umjesto nepoznanice a u drugoj jednadžbi uvrstit ćemo $b \cdot \tan\alpha$:

$$b \cdot \tan\alpha + b = 12$$

Nakon izlučivanja nepoznanice b imamo:

$$b \cdot (\tan\alpha + 1) = 12$$

Podijelimo sve sa $(\tan\alpha + 1)$ pa dobijemo:

$$b = \frac{12}{\tan\alpha + 1}$$

Sada kad imamo stranicu b možemo funkcijom kosinus povezati tu stranicu, kut α i hipotenuzu c:

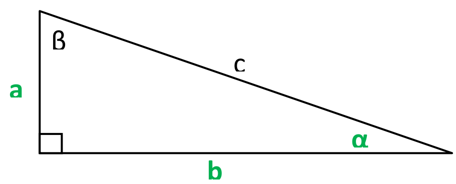
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Te nakon množenja s ***c*** i dijeljenja s ***cos α*** imamo:

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}$$

2. Izračunaj stranice pravokutnog trokuta ako mu je površina jednaka 22 cm^2, a veličina jednog kuta iznosi 56^o 40´.?

P = 22 cm^2
α= 56^o 40´
a, b, c = ?
P =a*b/2



Na skici pravokutnog trokuta uočimo stranice a i b, te ih funkcijom tangens povežemo s zadanim kutom α :

$$\tan\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

Odnosno, nakon množenja:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \tan\boldsymbol{\alpha}$$

Problem je što se pojavljuju dvije nepoznanice, pa gornju jednadžbu moramo kombinirati s već dobivenom površinom:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\mathbf{2}} = \mathbf{22}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \tan\boldsymbol{\alpha} \\ \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\mathbf{2}} = \mathbf{22} \end{cases}$$

U drugu jednadžbu, umjesto a uvrstimo $\boldsymbol{b} \cdot \tan\boldsymbol{\alpha}$ te pomnožimo s 2:

$$\boldsymbol{b} \cdot \tan\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{b} = \mathbf{44}$$

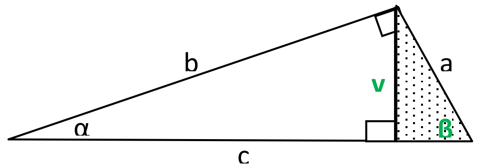
Nakon sređivanja i dijeljenja s ***tan α*** imamo:

$$\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{44}}{\tan\boldsymbol{\alpha}}$$

Sada je jednostavno dobiti i ostale stranice – najprije b uvrstimo u $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \tan\boldsymbol{\alpha}$ i izračunamo a, dok c možemo dobiti Pitagorinim poučkom.

3. Kolika je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, ako je duljina visine na hipotenuzu 11 cm. A β= 48° 50´ ?

v_c = 11 cm
<u>β= 48° 50´</u>
c = ?



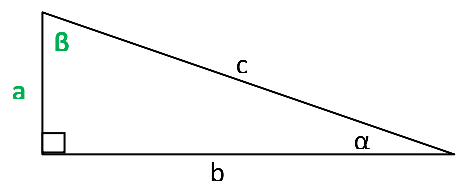
Visina na hipotenuzu je podijelila pravokutni trokut na dva manja pravokutna trokuta. Primijetimo da u iscrtanom pravokutnom trokutu imamo poznata dva elementa – katetu v i kut β, pa bi mogli izračunati hipotenuzu a koristeći funkciju sinus:

$$\mathbf{sin\beta} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{a}}$$

odnosno, nakon množenja sa a i dijeljenja sa sin β:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v}}{\mathbf{sin\beta}}$$

No, sada u pravokutnom trokutu imamo poznatu katetu a i kut β pa možemo izračunati i ostale dvije stranice:



$$\cos \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$$

odnosno

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}}{\cos \boldsymbol{\beta}}$$

Treću stranicu a možemo izračunati pomoću Pitagorinog poučka.

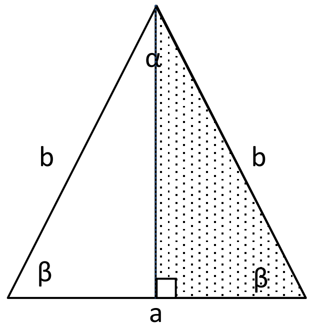
4. Ako je duljina ortogonalne projekcije katete a na hipotenuzu pravokutnog trokuta jednaka 10 cm, a duljina katete b je 7 cm, koliki su kutovi ovog trokuta? (IV.1)

5. Razlika kuta uz osnovicu i kuta pri vrhu jednakokračnog trokuta iznosi 12°, krak je dulji od osnovice za 3 cm. Kolika je površina ovog trokuta? ? (IV.16)

$\beta - \alpha = 12^{\circ}$
<u>b – a = 3 cm</u>
P = ?

$$P = \frac{a \cdot v}{2}$$

Iz formule za površinu jasno se vidi da je potrebno izračunati osnovicu a i visinu v. Stoga ćemo jednakokračnom trokutu povući visinu na osnovicu i uočiti jedan od dva pravokutna trokuta na koje visina podijeli jednakokračan trokut



No, najprije je potrebno iskoristiti činjenicu da je $\boldsymbol{\beta - \alpha = 12^{\circ}}$, te izračunati kutove α i β. To ćemo postići korištenjem činjenice da je zbroj kutova u trokutu 180° .

Napišimo te dvije činjenice zajedno:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 12^{\circ} \\ \alpha + 2\,\beta = 180^{\circ} \end{cases}$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi (α se pokrati) dobijemo:

$$3\,\beta = 192^{\circ}$$

odnosno $\beta = 64^{\circ}$

Sada je potrebno odabrati tri elementa u izdvojenom pravokutnom trokutu te ih povezati trigonometrijskom funkcijom. Pri odabiru elemenata potrebno je obratiti pažnju što nam je zadano u zadatku.
Stoga uočimo katetu a/2 i hipotenuzu b te kut β i povežimo ih funkcijom kosinus:

$$\cos \boldsymbol{\beta} = \frac{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}}{\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1}}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{b}}$$

Nakon množenja sa 2b imamo:

$$\mathbf{2 \cdot b \cdot \cos\beta = a}$$

Jednadžba koju smo dobili nije, sama za sebe, rješiva jer u sebi ima 2 nepoznanice. Međutim, mi smo „pametno“ birali elemente trokuta koje smo povezali funkcijom kosinus jer iste te dvije nepoznanice imamo povezane u jednadžbi koju smo dobili pri zadavanju zadatka.

Napišimo obje jednadžbe jednu ispod druge kako bi bolje vidjeli način na koji ćemo od njih dvije dobiti jednu jednadžbu, ali samo s jednom nepoznanicom:

$$\begin{cases} \mathbf{2 \cdot b \cdot \cos\beta = a} \\ \mathbf{b - a = 3\ cm} \end{cases}$$

Prva jednadžba nam „kaže“ da umjesto a u drugu jednadžbu uvrstimo izraz $\mathbf{2 \cdot b \cdot \cos\beta}$ **:**

$$\mathbf{b - 2 \cdot b \cdot \cos\beta = 3}$$

Izlučimo b i podijelimo sa zagradom:

$$\mathbf{b = \frac{3}{1 - 2 \cdot \cos\beta}}$$

Dalje je jednostavno – izračunati podatak za b uvrstimo u **b – a = 3** te izračunamo stranicu a, a zatim Pitagorom izračunamo i visinu v

$$\mathbf{v^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

te sve to uvrstimo u formulu za površinu.

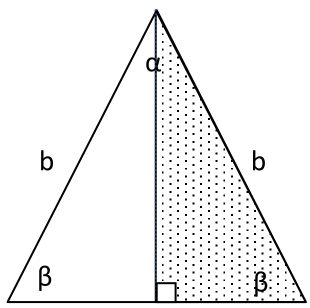
6.	U jednakokračnom trokutu kut uz osnovicu za 20^0 je veći od kuta nasuprot osnovici. Razlika duljina kraka i osnovice je 1 cm. Kolike su duljine stranica trokuta?

$\beta = \alpha + 20^0$
$\underline{b - a = 1\ cm}$
a, b = ?

Izračunajmo najprije kutove tako da zadanu vezu između kutova α i β koju smo dobili u zadatku (**β = α + 20⁰**) uvrstimo u izraz za zbroj kutova u trokutu, tj. u jednadžbu **α + 2β = 180⁰** :

$$\mathbf{\alpha + 2 \cdot (\alpha + 20) = 180}$$

te izračunamo najprije kut α a zatim i β.

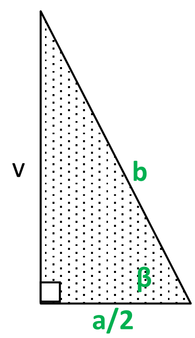


Postupak nastavljamo uočavajući pravokutni trokut kojeg dobijemo povlačenjem visine na osnovicu te povezujući trigonometrijom stranice a i b (jer je zadana veza između tih stranica: **b – a = 1**).

$$\mathbf{\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{1}} = \frac{a}{2 \cdot b}}$$

Te nakon množenja s 2b:

$$\mathbf{2 \cdot b \cdot \cos\beta = a}$$



Sada preostaje kombinacijom dvaju izraza s dvije nepoznanice dobiti jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2 \cdot b \cdot \cos\beta = a} \\ \boldsymbol{b - a = 1} \end{cases}$$

U drugu jednadžbu umjesto **a** uvrstimo $\boldsymbol{2 \cdot b \cdot \cos\beta}$ i izlučimo **b**:

$$\boldsymbol{b - 2 \cdot b \cdot \cos\beta = 1}$$

$$\boldsymbol{b(1 - 2 \cdot \cos\beta) = 1}$$

te podijelimo sa zagradom:

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\boldsymbol{1 - 2 \cdot \cos\beta}}$$

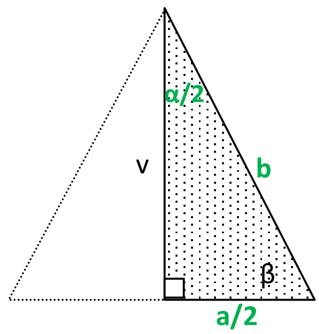
I još preostaje izračunati a uvrštavanjem vrijednosti b u jednadžbu **b – a = 1**.

7.	Opseg jednakokračnog trokuta iznosi 30 cm. Kut naspram osnovice trokuta jednak je 104°. Izračunaj površinu trokuta. ?

o = 30 cm
α = 104°
P = ?

$$P = \frac{a \cdot v}{2}$$

S obzirom da je opseg jednakokračnog trokuta **a + 2b** jasno je da treba trigonometrijom povezati **a**, **b** i kut **α** u pravokutnom trokutu kojeg dobijemo povlačenjem visine na osnovicu



$$\boldsymbol{\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2 \cdot b}}$$

Sređivanjem te jednadžbe množenjem sa 2b i kombiniranjem sa jednadžbom za opseg (o = **a + 2b = 30**) dobijemo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = 2 \cdot b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \\ \boldsymbol{a + 2 \cdot b = 20} \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe uvrstimo izraz $\boldsymbol{2 \cdot b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$ u drugu jednadžbu i izlučimo **b:**

$$\boldsymbol{2 \cdot b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot b = 20}$$

$$\boldsymbol{b \cdot \left(2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + 2\right) = 20}$$

Još nam preostaje sve podijeliti sa zagradom:

$$\boldsymbol{b = \frac{20}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + 2}}$$

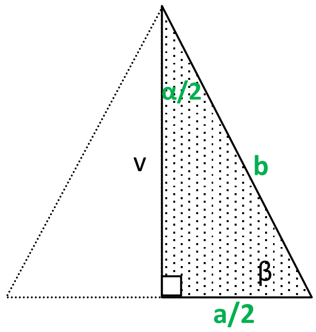
Sada nam preostaje izračunati a uvrštavanjem upravo izračunatog podatka za b u $\boldsymbol{a = 2 \cdot b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$ a zatim primjenom Pitagorinog poučka pronaći i visinu v te izračunati površinu trokuta.

8. Krak jednakokračnog trokuta trostruko je dulji od njegove osnovice. Koliki su kutovi tog trokuta?

b = 3a
α, β = ?

Podaci koji su zadani kažu nam što moramo povezati koristeći trigonometriju: to su stranice a i b te jedan kut.

Skicirajmo jednakokračan trokut te jedan od dva pravokutna trokuta koja dobijemo povlačeći visinu na osnovicu i primijenimo trigonometriju:



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2\cdot b}$$

Sada u dobivenu formulu u nazivnik umjesto b uvrstimo 3a, te skratimo a:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\cdot 3\cdot a} = \frac{1}{6}$$

Kad dobijemo kut α, do kuta β dolazimo koristeći činjenicu da je zbroj kutova u trokutu 180°. Pošto jednakokračan trokut ima kutove α, β i β vrijedi:

$$\alpha + 2\beta = 180^{o}$$

9. Razlika duljina kraka i osnovice jednakokračnog trokuta iznosi 3 cm, kut nasuprot osnovici ima 44° 20´. Kolika je površina tog trokuta?

10. Duljina dijagonale pravokutnika je 16 cm, a kut između dijagonala iznosi 118°. Kolika je površina pravokutnika?

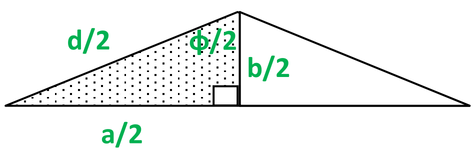
d = 16 cm
Φ = 118°
P = ?
P = ab

Izvucimo jednakokračan trokut s osnovicom a i kutom ϕ nasuprot osnovici (iscrtani dio) a onda ga visinom podijelimo na dva pravokutna te primijenimo trigonometriju:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{a}{d}$$

odnosno:

$$a = d\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$$



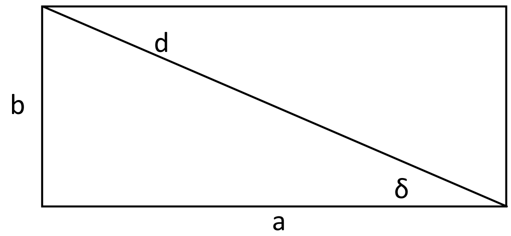
Stranicu b dobijemo primjenom Pitagorinog poučka:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

11. Površina pravokutnika jednaka je $33 cm^2$, a kut što ga zatvara dijagonala s jednom stranicom iznosi 33^o. Kolike su duljine stranica pravokutnika?

$P = 33 cm^2$
$\delta = 33^o$
a, b = ?

S obzirom da je P = a∗b, jasno je da trigonometrijom treba povezati a, b i zadani kut. S obzirom da su a i b katete biramo funkciju tanges:



$$\tan \boldsymbol{\delta} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

Budući da ne znamo dvije vrijednosti (ni a ni b) morat ćemo kombinirati dvije jednadžbe te ih spojiti u jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom :

$$\begin{cases} \tan \boldsymbol{\delta} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 33 \end{cases}$$

U ovakvim situacijama je potrebno u jednoj jednadžbi postići da se jedna nepoznanica „nađe sama“ na jednoj strani jednadžbe, a nakon toga taj izraz uvrštavamo u drugu jednadžbu. U našem primjeru dobro je prvu jednadžbu pomnožiti s nazivnikom a. Tako ćemo se i riješiti nazivnika i dobiti nepoznanicu b samu na desnoj strani:

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \tan \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 33 \end{cases}$$

Uvrstimo sada izraz za b iz prve jednadžbe u drugu:

$$\boldsymbol{a} \cdot \tan \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{a} = 33$$

$$\boldsymbol{a}^2 \cdot \tan \boldsymbol{\delta} = 33$$

Dijeljenjem s ***tan δ*** dobijemo:

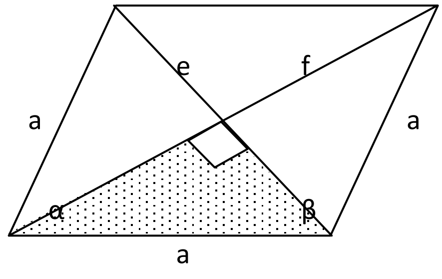
$$\boldsymbol{a}^2 = \frac{33}{\tan \boldsymbol{\delta}}$$

Sada nam preostaje uvrstiti dobiveni podatak za stranicu a u izraz $\mathbf{a} \cdot \tan \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{b}$ te izračunati i stranicu b.

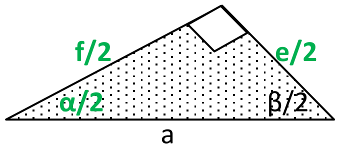
12. Duljine dijagonala romba jednake su 11 cm i 16 cm. Koliki su kutovi romba?

e = 11 cm
f = 16 cm
α, β = ?

Zadane su dijagonale romba pa treba uočiti pravokutni trokut kojem je pravi kut u sjecištu dijagonala. Dijagonale se, osim toga, raspolavljaju a raspolavljaju i kutove α i β na osnovici:



Istaknimo 3 elementa u tom trokutu (dva koja znamo i treći koji želimo izračunati) te primijenimo trigonometriju pravokutnog trokuta:



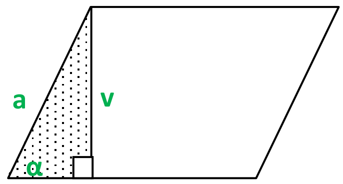
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{\frac{f}{2}} = \frac{e}{f}$$

Kada iz gornjeg izraza izračunamo kut α, do kuta β dolazimo jednostavno zahvaljujući činjenici da je zbroj kutova romba jednak 180^0, pa je $\boldsymbol{\beta = 180^0 - \alpha}$.

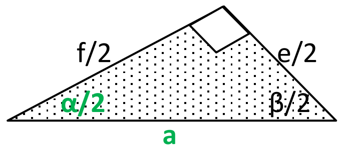
13. Visina romba duga je 4 cm, njegov šiljasti kut iznosi 48^0. Kolika je duljina veće dijagonale romba?

v = 4 cm
$\underline{\alpha = 48^0}$
e, f = ?

Osim pravokutnog trokuta kojeg čine dijagonale pravokutnika u rombu pravi kut možemo dobiti i povlačenjem visine.



Taj pravokutni trokut nam je potreban kako bi iz njega izračunali stranicu a. Ona nam je potrebna kako bi u pravokutnom trokutu iz kojeg želimo izračunati dijagonale imali dva poznata elementa.



Dakle, najprije funkcijom sinus povežimo a, v i α:

$$\sin\alpha = \frac{v}{a}$$

te izrazimo a:

$$a = \frac{v}{\sin\alpha}$$

Sada iz drugog trokuta funkcijom sinus povežimo e/2, α/2 i a:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{a} = \frac{e}{2\cdot a}$$

Kada pomnožimo cijelu jednadžbu sa 2a dobijemo dijagonalu e:

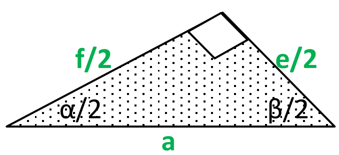
$$e = 2\cdot a\cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

Dijagonalu f izračunajte ili Pitagorinim poučkom ili primjenom funkcije kosinus te odaberite veću dijagonalu (sjetite se, traži se veća dijagonala).

14. Opseg romba je 32 cm, zbroj duljina njegovih dijagonala 34 cm. Koliki je tupi kut romba?

o = 32 cm
$\underline{e + f = 34\text{ cm}}$
α, β = ?

Lagano se, iz opsega izračuna stranica a, a = 8 cm. Uz taj podatak vidimo da imamo jednadžbu koja povezuje e i f - dakle dvije nepoznanice. Stoga trebamo još jednu jednadžbu sa e i f, a da pri tome ne uvedemo novu nepoznanicu. To je moguće primjenjujući Pitagorin poučak na iscrtani trokut:



$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2$$

$$e + f = 34$$

U prvoj jednadžbi izvršimo kvadriranja, pomnožimo s nazivnikom, a iz druge jednadžbe izrazimo e pomoću f:

$$e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2$$

$$e = 34 - f$$

Uvrstimo izraz za e iz druge jednadžbe u prvu jednadžbu:

$$(34 - f)^2 + f^2 = 4 \cdot a^2$$

$$1156 - 68 \cdot f + f^2 + f^2 = 256$$

$$2 \cdot f^2 - 68 \cdot f + 900 = 0$$

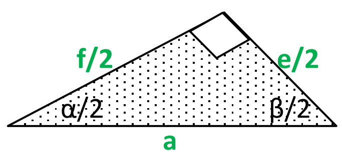
$$f^2 - 34 \cdot f + 450 = 0$$

Dobiju se dva rješenja:

$f_1 = 25$ $e_1 = 9$

$f_2 = 9$ $e_2 = 25$

Dovoljno je uzeti jedan par te primjenom trigonometrije (npr. funkcije tangens) povezati e, f i kut α:



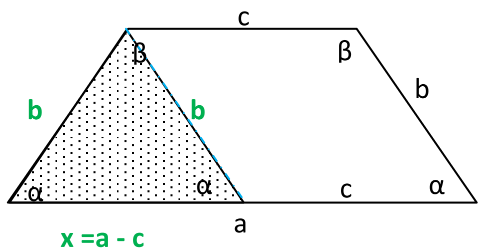
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{\frac{f}{2}} = \frac{e}{f}$$

Kut β se dobije iz : **β = 180⁰ - α**

15. Duljine osnovica jednakokračnog trapeza jednake su 10 cm i 2 cm, duljina je kraka 6 cm. Koliki su kutovi trapeza?

a= 10 cm
c = 2 cm
b = d = 6 cm
α, β = ?

Trapez podijelimo na trokut i paralelogram, a zatim u trokutu spustimo visinu kako bi ga podijelili na dva pravokutna trokuta.



Povežimo **b, x/2 i α** funkcijom kosinus i izračunajmo kut α:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{x}{2}}{b} = \frac{x}{2 \cdot b}$$

Zatim izračunajmo kut β: **β = 180⁰ - α**.

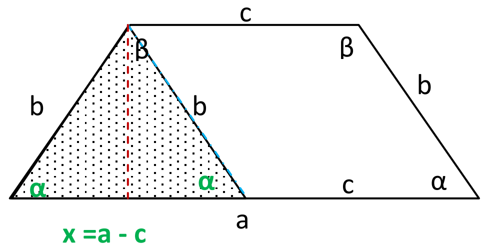
16. Šiljasti kut jednakokračnog trapeza je 63^{o}, duljine osnovica jednake su 3 cm i 12 cm. Kolika je površina trapeza?

$\alpha = 63^{o}$
a= 12 cm
<u>c= 3 cm</u>
P = ?

Iz formule za površinu:

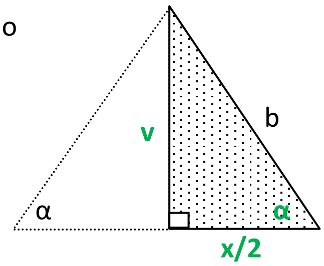
$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

vidimo da nedostaje visina v



Naći ćemo je iz pravokutnog trokuta tako da primijenimo funkciju tangens:

$$\tan\alpha = \frac{v}{\frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot v}{x}$$



Pomnožimo gornju jednadžbu sa x, a zatim sve podijelimo s 2:

$$\frac{x \cdot \tan\alpha}{2} = v$$

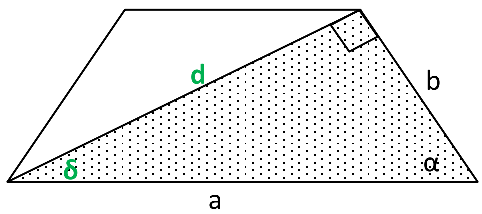
Sada uvrstimo izračunatu visinu u formulu za površinu.

17. Dijagonala jednakokračnog trapeza okomita je na krak, a s osnovicom zatvara kut od $42^{o}\ 30'$. Ako je duljina dijagonale 12 cm, kolika je površina trapeza?

$\delta = 42^{o}\ 30'$
<u>d = 12 cm</u>
P = ?

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

Iz iscrtanog trokuta (pravokutan je ☺) izračunat ćemo stranicu a i kut α, a zatim na „klasičan način doći do visine v i kraće osnovice c:



Primijetimo da su α i δ kutovi pravokutnog trokuta, pa je njihov zbroj 90^{o}. Stoga je:

$$\alpha = 90^{o} - \beta$$

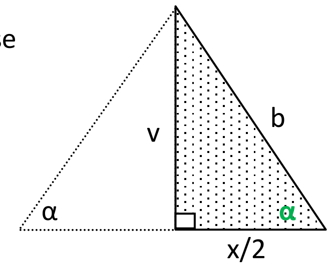
Sada primijenimo funkciju kosinus na kut δ:

$$\cos\delta = \frac{d}{a}$$

Množenjem jednadžbe sa a, a zatim dijeljenjem s cosδ dobijemo stranicu a:

$$a = \frac{d}{\cos\delta}$$

Nacrtajmo sada trapez bez dijagonale, ali povucimo visinu v i uočimo jedan od dva pravokutna trokuta koji pri tome nastanu:



S obzirom da u tom trokutu ne znamo ni jednu stranicu, vratimo se Trokutu iz kojeg smo izračunali stranicu a te izračunajmo iz njega i krak b (npr. Pitagorinim poučkom).

Sada je moguće, funkcijom sinus, povezati b, v i α:

$$\sin\alpha = \frac{v}{b}$$

odnosno, nakon množenja s b:

$$v = b \cdot \sin\alpha$$

Preostaje nam još izračunati osnovicu c, kako bi imali sve podatke koji su nam potrebni za računanje površine. To ćemo napraviti tako da nađemo x iz trokuta:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = b^2 - v^2$$

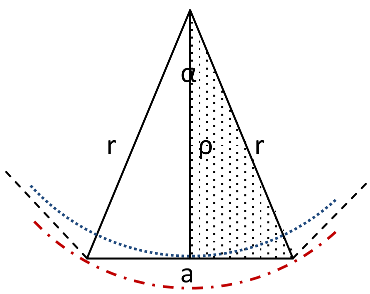
Iz x = a – c slijedi **c = a – x.**

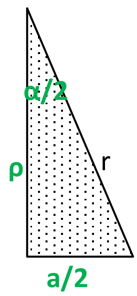
18. Kolika je površina deveterokuta kojem je polumjer upisane kružnice jednak 3 cm?

n = 9
<u>P = 3 cm</u>
P = ?

$$P = n \cdot \frac{a \cdot \rho}{2}$$

Najprije ćemo izračunati središnji kut α = 360^0 : 9
α = 40^0
Nakon toga uočimo karakteristični trokut pravilnog deveterokuta te povucimo visinu ρ (polumjer **u**pisane kružnice) i uočimo jedan od dva pravokutna trokuta koji pri tome nastanu, te pomoću njega izračunajmo stranicu a koja nam je potrebna za računanje površine:





$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} = \frac{a}{2 \cdot \rho}$$

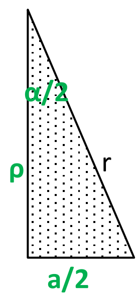
Nakon množenja jednadžbe s 2ρ:

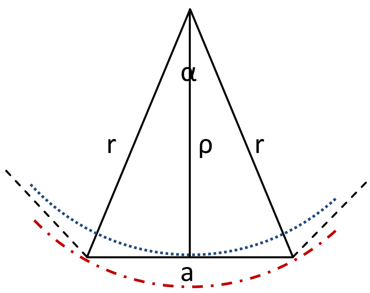
$$a = 2 \cdot \rho \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$$

19. Kolika je površina pravilnog petnaesterokuta opisanoga kružnici polumjera 6 cm?

n = 15
<u>ρ = 6 cm</u>
P = ?

$$P = n \cdot \frac{a \cdot \rho}{2}$$





Zadatak rješavamo na isti način kao i 18. Zadatak
(**α** = 360^0 : 15 = **24^0** ostalo je identično)

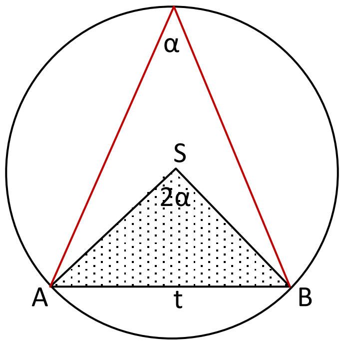
NAPOMENA: Budite oprezni kada se radi o kružnicama i mnogokutu. Bitno je je li kružnica opisana ili upisana mnogokutu, a ne (kao u tekstu ovog – 19. Zadatka – je li mnogokut opisan ili upisan kružnici !!!

20. Kolika je duljina tetive AB u kružnici polumjera 10 cm, ako toj tetivi pripada obodni kut od 77^{o}?

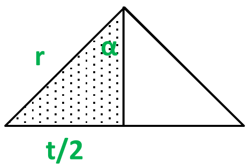
r = 10 cm
$\underline{\alpha = 77^{o}}$
t = ?

Bitno je znati teorem o obodnom i središnjem kutu:

Središnji kut nad tetivom AB je dvostruko veći od obodnog kuta nad istom tetivom (bitno je samo da se oba nalaze s iste strane tetive)



Uočimo jednakokračni trokut ABS, te povucimo visinu iz vrha S kako bi dobili dva pravokutna trokuta i na jednom od njih primijenili trigonometriju pravokutnog trokuta kako bi izračunali veličinu t:



Pravi izbor je funkcija **sinus** (povezujemo **hipotenuzu** r i **katetu** t/2 **nasuprot kuta** α):

$$\sin\alpha = \frac{\frac{t}{2}}{r} = \frac{t}{2\cdot r}$$

Množenjem sa 2r dobijemo izraz za t:

$$t = 2\cdot r\cdot \sin\alpha$$

21. Koliki je obodni kut nad tetivom duljine 7 cm u kružnici polumjera 10 cm?

t= 7 cm
<u>r = 10 cm</u>
α = ?

Zadatak se rješava identično kao i prošli – 20. Zadatak.

22. Koliki je obodni kut nad tetivom kružnice kojoj je duljina jednaka 3/5 duljine polumjera?

<u>t = 3/5r</u>
α = ?

Zadatak se rješava identično kao i – 20. Zadatak, pri čemu se u izraz

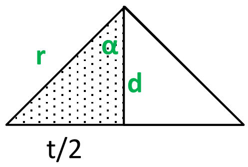
$$\sin\alpha = \frac{\frac{t}{2}}{r} = \frac{t}{2\cdot r}$$

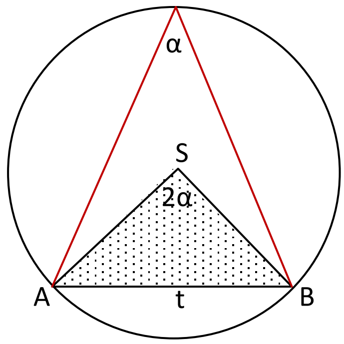
umjesto t uvrsti 3/5r, te se skrati r pa imamo:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{t}{2}}{r} = \frac{3}{10}$$

23. Tetiva kružnice od njena je središta udaljena 5 cm. Ako je polumjer kružnice 8 cm, koliki je šiljasti obodni kut nad tetivom?

d = 5 cm
r = 8 cm
α = ?





Ovdje treba iskoristiti funkciju kosinus:

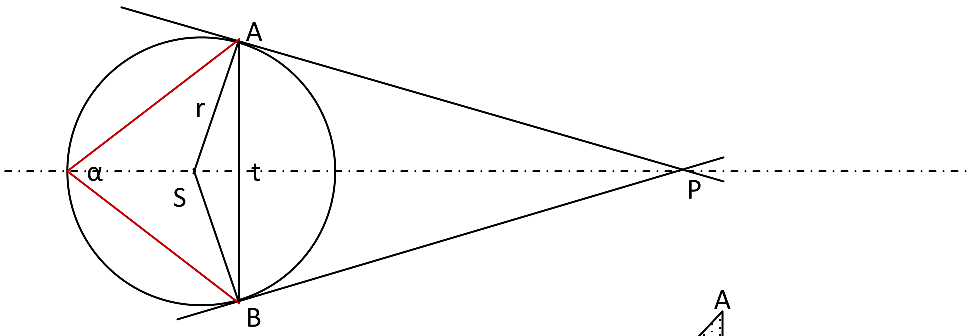
$$\cos\alpha = \frac{d}{r}$$

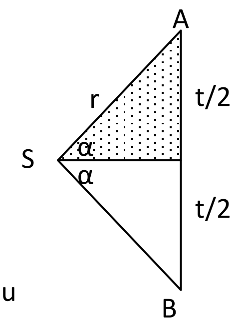
Odnosno, nakon množenja s r:

$$d = r \cdot \cos\alpha$$

24. Nad tetivom AB duljine 6 cm nalazi se obodni kut 53°. U točkama A i B konstruiraju se tangente na kružnicu i one se sijeku u točki P. Koliko je točka P udaljena od središta kružnice?

t = 6 cm
α = 53°
d = ?





Ovdje je potrebno uočiti dva trokuta. Prvi je trokut ABS
u kojem je kut pri vrhu S jednak 2α
(po teoremu o obodnom i središnjem kutu)
U tom trokutu ćemo spustiti visinu iz vrha S na tetivu AB

Uočit ćemo pravokutan trokut (iscrtano) te primijeniti funkciju
Sinus kako bi dobili polumjer r:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{t}{2}}{r} = \frac{t}{2 \cdot r}$$

Množenjem sa 2r i dijeljenjem sa 2sinα imamo polumjer r:

$$r = \frac{t}{2 \cdot \sin\alpha}$$

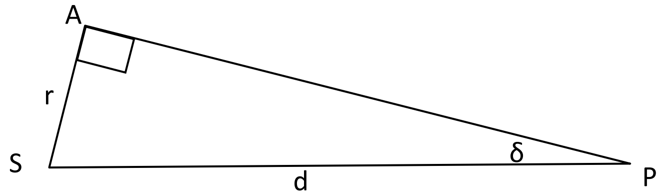
Sada treba koristiti drugi trokut - to je trokut ASP, jer se u njemu nalazi traženi podatak d (udaljenost SP). Taj je trokut pravokutan s pravim kutom pri vrhu A (jer je polumjer okomit na tangentu u točki dodira):

U njemu je funkcijom sinus moguće dobiti traženu veličinu d:

$$\sin \delta = \frac{r}{d}$$

Odnosno

$$d = \frac{r}{\sin \delta}$$

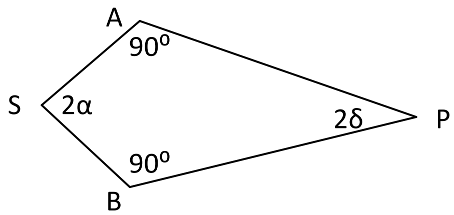


Međutim, potrebno je izračunati kut δ. Za to je potrebno uočiti četverokut ASBP te uočiti da su njegova 4 kuta: 2α, 90°, 90° i 2δ. Pošto je zbroj kutova u četverokutu 360° vrijedi:

$2\alpha + 90^o + 90^o + 2\delta = 360$

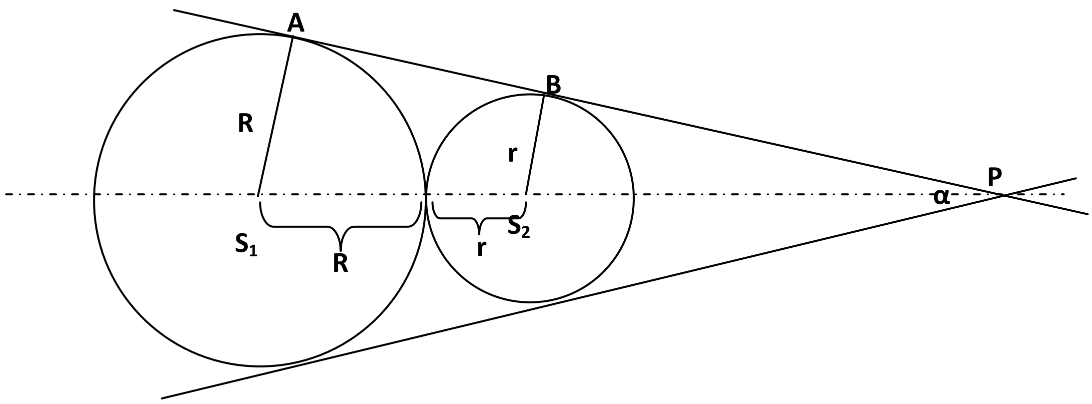
$106^o + 180^o + 2\delta = 360^o$

$2\delta = 74^o$ **$\delta = 37^o$**

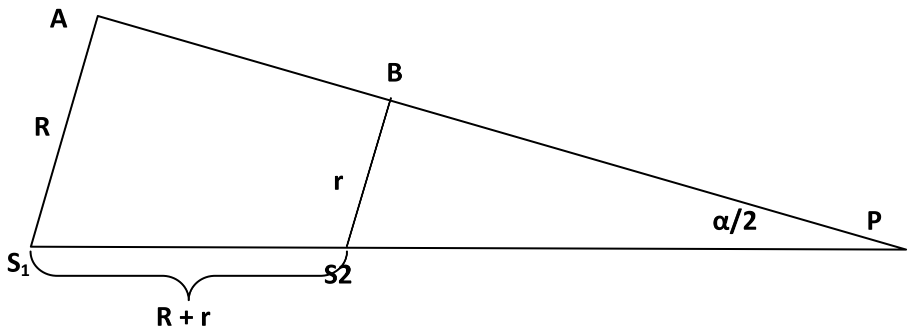


25. Dvije se kružnice diraju izvana. Pod kojim se kutom sijeku njihove zajedničke vanjske tangente ako je polumjer veće kružnice 10 cm, a polumjer manje 7 cm? (IV.10)

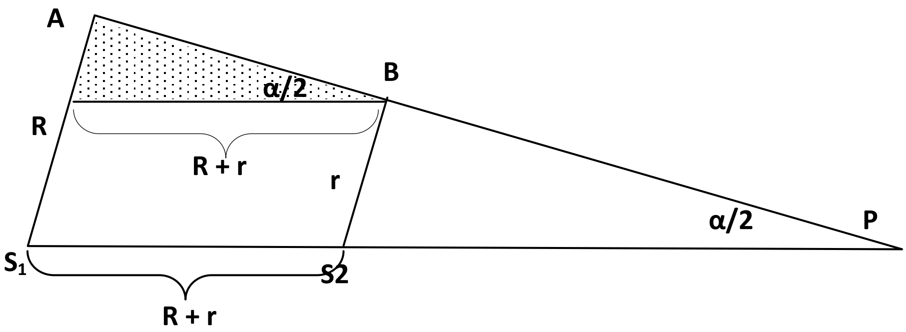
R = 10 cm
<u>r = 7 cm</u>
α = ?



Najprije treba uočiti dva pravokutna trokuta: AS_1P i AS_2P:



Ni u jednom od ta dva pravokutna trokuta nemamo poznata dva elementa. Stoga povucimo točkom B paralelu sa pravcem S_1S_2:



Dobili smo treći pravokutni trokut čija je hipotenuza R + r, a kateta nasuprot kuta α/2 iznosi R – r (razmisli zašto ?!) pa možemo funkcijom sinus doći najprije do kuta α/2, a onda je lako izračunati i α:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R+r}{R-r}$$

Svim učenicima želim ugodno rješavanje i puno uspjeha na pismenom ispitu

☺

Ukoliko ima nejasnoća, pitanja, eventualnih grešaka možete javiti na E-mail

mbuzancic@msn.com