

## Zadaci – Zadaća 2

### 1. Odredite peti član u razvoju binoma $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}})^9$ .

Iz gornjeg binoma je vidljivo da je  $a = \sqrt{x}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$  a  $n = 9$ . Svi članovi u binomnom razvoju, pa i ovaj kojeg mi tražimo mora biti oblika  $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$  (izraz za opći član u binomnom razvoju). Pošto se traži peti član zaključujemo da je  $k = 4$  ( $k$  je uvijek za jedan manji od broja člana!!)

Uvrstimo vrijednosti za  $a$ ,  $b$ ,  $k$  i  $n$  u izraz za opći član:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{9}{4} \sqrt{x}^{10-4} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^4 = \binom{9}{4} \sqrt{x}^6 \cdot \frac{1}{x} = 126 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x} = 126x^2$$

### 2. Nađi sve vrijednosti korijena $\sqrt[3]{-2 - 2i}$ .

Najprije treba odrediti realni ( $x$ ) i imaginarni dio ( $y$ ) kompleksnog broja  $z = -2 - 2i$  pod korjenom.

Svaki kompleksni broj je oblika  $z = x + yi$  pa vidimo da je  $z = -2 - 2i$  iz čega se vidi da je

$$x = -2, y = -2$$

Sada ga treba prebaciti u trigonometrijski oblik:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

gdje je  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , te  $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ . Dakle:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan \varphi = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4} \text{ (jer je točka } (-2, -2) \text{ u trećem kvadrantu)}$$

pa je

$$z = 2\sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

Trigonometrijski prikaz zadanog kompleksnog broja. Sada treba primijeniti formulu za korjenovanje kompleksnog broja zapisanog u trigonometrijskom obliku:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

gdje za  $k$  uvrštavamo redom brojeve 0, 1 i 2 (uvijek od nule do broja koji je za 1 manji od broja  $n$ !!).

Tri rješenja (jer je treći korijen) su:

za  $k = 0$ :

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \left( \cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

za  $k = 1$ :

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \left( \cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \left( \cos \frac{13\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{13\pi}{12} \right)$$

za  $k = 2$ :

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \left( \cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \left( \cos \frac{21\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{21\pi}{12} \right)$$

### 3. Članovi aritmetičkog niza su $a_5 = 2, a_{40} = 142$ . Koliko je $a_{13} = ?$

Ovdje treba sve članove niza izraziti preko formule za opći član:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$  i uvrstiti u zadane jednadžbe:

$$\begin{cases} a_5 = 2 \\ a_{40} = 142. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 2 \\ a_1 + 39d = 142 \end{cases}$$

Nakon množenja prve jednadžbe s -1 i zbrajanja s drugom jednadžbom imamo:

$$\begin{cases} -a_1 - 4d = -2 \\ a_1 + 39d = 142 \end{cases}$$

$$35d = 140$$

Odnosno nakon dijeljenja s 5:

$$d = 4.$$

Uvrstimo to u jednu od gornjih jednadžbi pa izračunamo da je  $a_1 = -\frac{1}{2}$ .

No, sada je lako izračunati i  $a_{13}$  jer je  $a_{13} = a_1 + 12d = -\frac{1}{2} + 12 \cdot 4 = \frac{95}{2}$

### 4. Deriviraj funkciju $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ .

Derivat ćemo po pravilu za derivaciju umnoška:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

U našem primjeru je  $g(x) = x^2$ , a  $h(x) = \cos x$  pa je:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \cos x + x^2 \cdot (\cos x)' = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

### 5. Izračunaj $\int_1^3 (1 - x^2) dx$ .

$$\begin{aligned} \int_1^3 (1 - x^2) dx &= \int_1^3 1 \cdot dx - \int_1^3 x^2 dx = \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \text{(u granicama od 1 do 3)} = \\ &= \left( 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left( 1 - \frac{1^3}{3} \right) = 3 - \frac{27}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 2 - \frac{26}{3} = -\frac{20}{3} \end{aligned}$$

### 6. Prikaži grafički funkciju $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ .

S obzirom da se radi o polinomu potrebno je naći njegove nul-točke (sjecišta s osi x) i ekstreme (maximum – „brijeg“ i minimum „dol“).

Nul-točke tražimo tako da funkciju izjednačimo s nulom:

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

Nakon faktorizacije

$$x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$$

Nastaju dvije jednačbe:

$x = 0$  te jednačba

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Čija su rješenja  $x_1 = 1$  te  $x_2 = 3$ .

Dakle, funkcija ima 3 nul-točke: **(0, 0)**, **(1, 0)** i **(3, 0)**.

Da bi našli ekstreme treba funkciju derivirati i njenu derivaciju izjednačiti s nulom. Derivirajmo funkciju  $y = x^3 - 4x^2 + 3x$  :

$$y' = 3x^2 - 8x + 3$$

Sada treba riješiti jednačbu

$$3x^2 - 8x + 3 = 0$$

Njena rješenja su:

$$x_{1,2} = \frac{8 \mp \sqrt{64 - 36}}{6} = \frac{8 \mp \sqrt{28}}{6}$$

$$x_1 = 0.45, \quad x_2 = 2.22$$

Uvrstimo ove vrijednosti u funkciju  $f(x)$  kako bi našli i y-e točaka:

$$y_1 = f(x_1) = f(0.45) = (0.45)^3 - 4 \cdot (0.45)^2 + 3 \cdot (0.45) = 0.63$$

$$y_2 = f(x_2) = f(2.22) = (2.22)^3 - 4 \cdot (2.22)^2 + 3 \cdot (2.22) = -2.11$$

Dakle, točke  $(0.45, 0.63)$  i  $(2.22, -2.11)$  su „ekstremne“ točke.

Sada možemo nacrtati graf:

