

Zadaci - Zadaća 1

1. Odredite u razvoju binoma $(x + 2)^{10}$ član s x^6 .

Iz gornjeg binoma je vidljivo da je $a = x$, $b = 2$ a $n = 10$. Svi članovi u binomnom razvoju, pa i ovaj kojeg mi tražimo mora biti oblika $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (izraz za opći član u binomnom razvoju)

Uvrstimo vrijednosti za a, b i n u izraz za opći član:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{10}{k} x^{10-k} 2^k = \binom{10}{k} 2^k x^{10-k}$$

Nedostaje nam k kojeg ćemo dobiti iz činjenice da eksponent potencije x^{10-k} mora biti 6:

$$x^{10-k} = x^6$$

Iz čega se lagano vidi da je $k = 4$. Sada je potrebno tu vrijednost za k uvrstiti u izraz $\binom{10}{k} 2^k x^{10-k}$ pa dobijemo da je traženi član:

$$\binom{10}{4} 2^4 x^{10-4} = 210 \cdot 16 \cdot x^6 = 3360x^6$$

2. Izračunaj $(i - \sqrt{3})^8$.

Najprije treba odrediti realni (x) i imaginarni dio (y) kompleksnog broja $z = i - \sqrt{3}$ unutar zagrade. Svaki kompleksni broj je oblika $z = x + yi$ pa vidimo da je $z = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$ iz čega se vidi da je

$$x = -\sqrt{3}, y = 1$$

Sada ga treba prebaciti u trigonometrijski oblik:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, te $\tan \varphi = \frac{y}{x}$. Dakle:

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$
$$\tan \varphi = \frac{1}{-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{11\pi}{6}$$

pa je

$$z = 2 \cdot \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

Trigonometrijski prikaz zadanog kompleksnog broja. Sada treba primijeniti formulu za potenciranje kompleksnog broja zapisanog u trigonometrijskom obliku:

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$
$$z^8 = 2^8 \cdot \left(\cos 8 \cdot \frac{11\pi}{6} + i \cdot \sin 8 \cdot \frac{11\pi}{6} \right) = 256 \cdot \left(\cos \frac{44\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{44\pi}{3} \right)$$
$$= 256 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

3. Napiši aritmetički niz ako je $a_2 + a_3 + a_4 = 24$, $a_1 \cdot a_5 = 28$.

Ovdje treba sve članove niza (osim a_1) izraziti preko formule za opći član: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ i uvrstiti u zadane jednadžbe:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 24 \\ a_1 \cdot a_5 = 28. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 24 \\ a_1 \cdot (a_1 + 4d) = 28. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 6d = 24 \\ a_1 \cdot (a_1 + 4d) = 28. \end{cases}$$

Nakon dijeljenja prve jednadžbe sa 3 dobijemo $a_1 + 2d = 8$ te kad 2d prebacimo desno

$$a_1 = 8 - 2d$$

Uvrstimo to u 2. jednadžbu:

$$(8 - 2d) \cdot (8 - 2d + 4d) = 28$$

Koja se nakon sređivanja pretvori u kvadratnu jednadžbu:

$$d^2 = 9$$

Dakle, postoje dva rješenja t.j. dva niza:

I niz:

$$\mathbf{d=3, a_1 = 8 - 6 = 2}$$

II niz:

$$\mathbf{d = -3, a_1 = 8 + 6 = 14}$$

4. Ako je $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{x}{x-3}$, koliko je $f(x)$?

Izraz u zagradi $\frac{x-2}{x+2}$ „nazovimo t“ a onda iz te jednadžbe izrazimo x:

$$\frac{x-2}{x+2} = t$$

Pomnožimo cijelu jednadžbu s nazivnikom $x+2$:

$$\begin{aligned} x-2 &= t \cdot (x+2) \\ x-2 &= tx+2t \end{aligned}$$

Prebacimo članove sa x lijevo, te izlučimo x:

$$\begin{aligned} x-tx &= 2+2t \\ x(1-t) &= 2+2t \end{aligned}$$

I na kraju podijelimo jednadžbu sa $(1-t)$:

$$x = \frac{2+2t}{1-t}$$

$$\text{Uvrstimo to u } f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{x}{x-3} = f(t) = \frac{\frac{2+2t}{1-t}}{\frac{2+2t}{1-t}-3} = \frac{\frac{2+2t}{1-t}}{\frac{-1+5t}{1-t}} = \frac{2+2t}{-1+5t}$$

$$\mathbf{Dakle, } f(x) = \frac{2+2x}{-1+5x}$$

5. Odredi inverznu funkciju funkcije $f(x) = \log_3(x-2) - 1$.

Postupak se svodi na to da u zadanoj funkciji zamijenite $f(x)$ sa x , a x sa y te iz dobivene jednadžbe izrazite y . To je ujedno inverzna funkcija koju tražimo:

$$x = \log_3(y-2) - 1.$$

Najprije prebacimo -1 ljevo da logaritam „ostane sam“:

$$x+1 = \log_3(y-2)$$

Sada primijenite definiciju logaritma:

$$\begin{aligned} \log_{\text{baza}}(\text{argument}) &= \text{eksponent} \\ \Updownarrow \\ \text{argument} &= \text{baza}^{\text{eksponent}} \end{aligned}$$

U našem primjeru baza = 3, argument = $y - 2$, eksponent = $x - 1$ pa dobijemo:

$$y - 2 = 3^{x-1}$$

Te nakon prebacivanja broja -2 na desnu stranu imamo rješenje:

$$y = f^{-1}(x) = 3^{x-1} + 2$$

6. Prikaži grafički funkciju $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$

S obzirom da se radi o polinomu potrebno je naći njegove nul-točke (sjecišta s osi x) i ekstreme (maximum – „brijeg“ i minimum „dol“).

Nul-točke tražimo tako da funkciju izjednačimo s nulom:

$$(x^2 - 1)(x + 2) = 0$$

Nastaju dvije jednačbe:

$$x^2 - 1 = 0 \text{ s rješenjima } x_1 = 1 \text{ i } x_2 = -1 \text{ te jednačba}$$

$$x + 2 = 0 \text{ čije je rješenje } x = -2.$$

Dakle, funkcija ima 3 nul-točke: **(-2, 0), (-1, 0) i (1, 0)**.

Da bi našli ekstreme treba funkciju derivirati i njenu derivaciju izjednačiti s nulom. Deriviranje je lakše ako prethodno razmnožimo zagrade:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

Derivacija glasi:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

Sada treba riješiti jednačbu $3x^2 + 4x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \mp \sqrt{16 + 12}}{6} = \frac{-4 \mp \sqrt{28}}{6}$$

$$x_1 = -1.55, \quad x_2 = 0.22$$

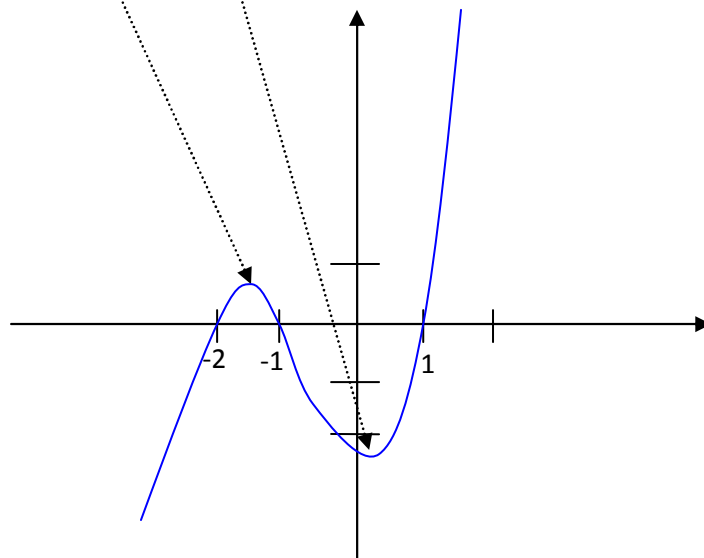
Uvrstimo ove vrijednosti u funkciju $f(x)$ kako bi našli i y-e točaka:

$$y_1 = f(x_1) = f(-1.55) = (-1.55)^3 + 2 \cdot (-1.55)^2 - (-1.55) - 2 = 0.63$$

$$y_2 = f(x_2) = f(0.22) = (0.22)^3 + 2 \cdot (0.22)^2 - (0.22) - 2 = -2.11$$

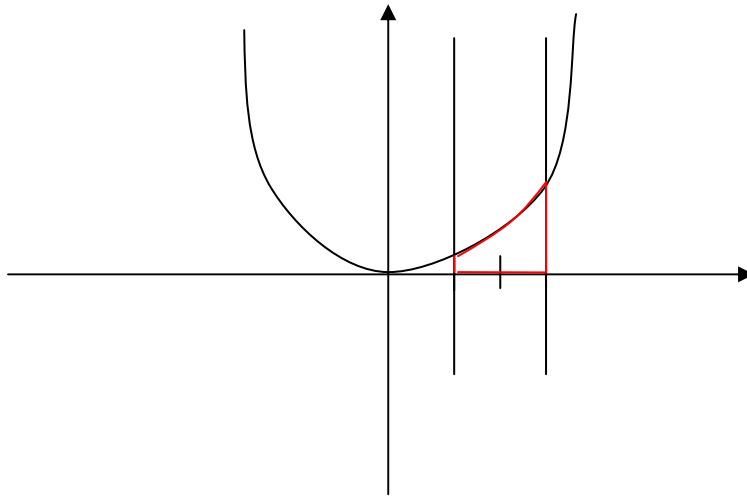
Dakle, točke **(-1.55, 0.63)** i **(0.22, -2.11)** su „ekstremne“ točke.

Sada možemo nacrtati graf:



7. Kolika je površina lika omeđenog parabolom $y = 2x^2$ i pravcima $x = 1$ i $x = 3$ i osi x ?

Najprije treba odskicirati te krivulje da bi vidjeli o kojoj se površini radi:



Radi se o površini omeđenoj crvenom bojom koja se nalazi ispod krivulje $y = x^2$, a omeđena je s lijeva pravcem $x = 1$, a s desna pravcem $x = 3$ pa je dobijemo rješavajući integral:

$$P = \int_1^3 2x^2 dx = 2 \int_1^3 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \text{ (u granicama od 1 do 3)} = 2 \cdot \frac{3^3}{3} - 2 \cdot \frac{1^3}{3} = \frac{52}{3}$$