

POLINOMI

Neka su $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ realni brojevi, te n prirodni broj. Tada se

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

naziva polinom n -tog stupnja.

$P(x) = -2x^2 - x + 4$ – polinom drugog stupnja

$P(x) = -3/4x^5 - 3x^3 + 4x - 3$ – polinom petog stupnja

Brojeve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma $P(x)$.

Za polinom kažemo da je **nul-polinom** ako su svi njegovi koeficijenti jednaki 0.

DIJELJENJE POLINOMA

Polinom $P(x)$ se može podijeliti polinomom $Q(x)$ samo ako mu je stupanj veći ili jednak stupnju polinoma $Q(x)$. Prilikom dijeljenja nastaju još dva polinoma – rezultat dijeljenja $R(x)$ i ostatak dijeljenja $O(x)$ pri čemu stupanj ostatka mora uvijek biti manji od stupnja polinoma s kojim smo dijelili. Pri tome uvijek vrijedi:

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + O(x)$$

Ako je **ostatak** dijeljenja **nul-polinom** kažemo da je polinom $P(x)$ **djeljiv** s polinomom $Q(x)$. Tada je

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x)$$

1. Polinom $P(x) = x^3 + x^2 + x$ podijelite polinomom $Q(x) = x$.

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 + x) : x = x^2 + x + 1 \\ -x^3 \\ \hline x^2 + x \\ -x^2 \\ \hline x \\ -x \\ \hline 0 \end{array}$$

1. $x^2 + x + 1$
2. $x^2 - x - 1$
3. $x^2 - x + 1$
4. $x^2 + 2x - 1$

Dakle, rezultat dijeljenja je $x^2 + x + 1$.

(odgovor: 1)

Komentar:

Do rezultata smo mogli doći i brže – rastavljanjem polinoma na faktore:

$$x^3 + x^2 + x = x \cdot (x^2 + x + 1)$$

iz čega se vidi da je rezultat dijeljenja $x^2 + x + 1$.

2. Polinom $P(x) = x^3 - 1$ podijelite polinomom $Q(x) = x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1 \\
 -x^3 + x^2 \\
 \hline
 x^2 - 1 \\
 -x^2 + x \\
 \hline
 x - 1 \\
 -x + 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

1. $x^2 + x + 1$
2. $x^2 + x$
3. $x^2 + 1$
4. $x^2 - 1$

Dakle, rezultat dijeljenja je $x^2 + x + 1$.

(odgovor: 1)

Komentar:

I ovdje smo do rezultata mogli doći i brže – rastavljanjem polinoma na faktore:

$$x^3 - 1 = (\text{razlika kubova}) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

iz čega se vidi da je rezultat dijeljenja $x^2 + x + 1$.

3. Polinom $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ podijelite polinomom $Q(x) = x + 1$.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - x^2 - x + 1) : (x + 1) = x^2 - 2x + 1 \\
 -x^3 - x^2 \\
 \hline
 -2x^2 - x + 1 \\
 +2x^2 + 2x \\
 \hline
 x + 1 \\
 -x - 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

1. $x^2 - 2x + 1$
2. $x^2 - 2x$
3. $x^2 + 1$
4. $x^2 - 1$

Rezultat dijeljenja je $x^2 - 2x + 1$.

(odgovor: 1)

4. Ako je polinom $P(x) = x^3 - x^2 + bx - 1$ djeljiv polinomom $Q(x) = x^2 + 1$, tada b pripada skupu:

S obzirom da je polinom $P(x)$ djeljiv s polinomom $Q(x)$ znači da je ostatak dijeljenja nul-polinom (polinom čiji su svi koeficijenti jednaki nula). Dakle, treba dijeliti ova dva polinoma te „naštimiti“ b tako da ostatak dijeljenja bude nul-polinom:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - x^2 + bx - 1) : (x^2 + 1) = x - 1 \\
 -x^3 \quad -x \\
 \hline
 -x^2 + (b-1)x - 1 \\
 +x^2 \quad \quad +1 \\
 \hline
 (b-1)x
 \end{array}$$

1. $[-2, -1]$
2. $[0, 1]$
3. $[2, 3]$
4. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Vidimo da je ostatak polinom 1. stupnja $(b - 1)x$ čiji je koeficijent $b - 1$. Da bi taj polinom bio nul-polinom njegov koeficijent mora biti nula. Stoga, iz jednadžbe

$$b - 1 = 0$$

dobijemo rješenje **b = 1**. (odgovor: 2)

5. Ako je polinom $P(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + 3x + b$ djeljiv polinomom $Q(x) = x^3 - 2x + 1$, tada je $a - b$ jednako:

Zadatak rješavamo na isti način kao i prethodni:

$$(x^4 + ax^3 - 2x^2 + 3x + b) : (x^3 - 2x + 1) = x + a$$

$$\begin{array}{r} -x^4 \qquad \qquad + 2x^2 - x \\ \hline \qquad ax^3 \qquad \qquad + 2x + b \\ -ax^3 \qquad \qquad + 2ax - a \\ \hline \qquad (2 + 2a)x + b - a \end{array}$$

- | | |
|----|----|
| 1. | -1 |
| 2. | 0 |
| 3. | 1 |
| 4. | 2 |

Ostatak dijeljenja je polinom 1. stupnja $(2 + 2a)x + b - a$ čiji su koeficijenti $2 + 2a$ i $b - a$. Želimo li da ostatak ovog dijeljenja bude nul-polinom trebaju oba koeficijenta biti nula. To ćemo postići rješavanjem sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} 2 + 2a = 0 \\ b - a = 0 \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe dobijemo $a = -1$, te uvrštavanjem u drugu jednadžbu $b = -1$. No, to znači da je točan odgovor u ovom zadatku **odgovor** pod rednim brojem **2** jer je $a - b = 0$.

IZRAČUNAVANJE OSTATKA

6. Ostatak dijeljenja polinoma $P(x) = 2005x^{2005} - 2000x^{2000} + 100x^{100} - 50x^{50}$ polinomom $R(x) = x - 1$ je

- | | |
|----|------|
| 1. | 5005 |
| 2. | 505 |
| 3. | 55 |
| 4. | 2 |

Ovdje je važno iskoristiti činjenicu da je ostatak dijeljenja polinom čiji stupanj (*najveći eksponent od x unutar polinoma*) mora biti manji od stupnja polinoma s kojim dijelimo. Pogledamo li polinom $R(x)$ s kojim dijelimo vidimo da mu je stupanj jednak 1. To znači da ostatak dijeljenja mora biti polinom nultog stupnja (konstanta).

Neka je $Q(x)$ rezultat dijeljenja, a C ostatak dijeljenja (konstanta). Tada vrijedi:

$$P(x) = R(x) \cdot Q(x) + C$$

odnosno:

$$2005x^{2005} - 2000x^{2000} + 100x^{100} - 50x^{50} = (x - 1) \cdot Q(x) + C$$

Loše je što ne znamo polinom $Q(x)$ niti ga možemo izračunati (u razumnom vremenu) jer je prevelik stupanj polinoma $P(x)$.

No, dobro je to što ova „*polinomska*“ jednadžba vrijedi za bilo koji **konkretni** realni broj **x** pa vrijedi i za x koji je nul-točka polinoma $R(x) = x-1$ t.j. i za $x = 1$ pa uvrstimo umjesto x broj 1:

$$2005 \cdot 1^{2005} - 2000 \cdot 1^{2000} + 100 \cdot 1^{100} - 50 \cdot 1^{50} = (1 - 1) \cdot Q(1) + C$$

odnosno

$$2005 - 2000 + 100 - 50 = 0 \cdot Q(x) + C$$

$$2005 - 2000 + 100 - 50 = 0 \cdot Q(x) + C$$

$$55 = C$$

(odgovor: 3)

7. Ako je polinom $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ djeljiv polinomom $Q(x) = (x - 1)^3$, tada je $a+b+c$ jednako

1. -1
2. 0
3. 1
4. 2

Neka je $R(x)$ rezultat dijeljenja. Tada vrijedi:

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x)$$

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x - 1)^3 \cdot R(x)$$

Ova jednakost vrijedi za bilo koji realni broj x, pa je pametno izabrati onaj x koji će na desnoj strani „*neutralizirati*“ nepoznati polinom $R(x)$. S obzirom da se polinom $R(x)$ množi bilo bi dobro „*uštimati*“ da to množenje bude s nulom pa će $R(x)$ „*nestati*“ i neće biti važno što ga ne znamo.

Dakle, odaberimo x za koji je $(x - 1)^3 = 0$. Lako je vidljivo da je to $x = 1$. Uvrstimo ga u gornju jednadžbu:

$$1^4 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = (1 - 1)^3 \cdot R(1)$$

$$1 + a + b + c = 0 \cdot R(1)$$

$$1 + a + b + c = 0$$

$$a + b + c = -1$$

(odgovor: 1)

8. Ako je polinom $P(x) = x^5 - 2x^3 + ax^2 + b$ djeljiv polinomom $Q(x) = -1 + x^3$, tada je $a+b$ jednako

1. -1
2. 0
3. 1
4. 2

Zadatak rješavamo na isti način kao i prošli – Po teoremu o djeljivosti polinoma vrijedi:

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + O(x)$$

$P(x)$ – polinom koji dijelimo
 $R(x)$ – rezultat dijeljenja

$Q(x)$ – polinom s kojim dijelimo
 $O(x)$ – ostatak dijeljenja

U našem slučaju:

$$x^5 - 2x^3 + ax^2 + b = (-1 + x^3) \cdot R(x)$$

(ostatak je **NULA**, jer je polinom $P(x)$ **djeljiv** s polinomom $Q(x)$).

Naravno, opet treba pametno izabrati konkretni broj x koji ćemo uvrstiti u gornju jednadžbu
(pametan izbor je uvijek nul-točka polinoma s kojim se dijeli!!!)

A to će ovaj put biti rješenje jednadžbe $-1 + x^3 = 0$ odnosno $x = 1$:

$$1^5 - 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + b = (-1 + 1^3) \cdot R(1)$$

$$1 - 2 + a + b = 0 \cdot R(1)$$

$$1 - 2 + a + b = 0$$

$$a + b = 1$$

(odgovor: 3)

NULTOČKE NEKIH POLINOMA

9. $x=1$ je nul-točka polinoma $P(x) = x^3 - 1$ kratnosti

Zadatak ćemo riješiti tzv. Hornerovim algoritmom. Napravimo jednostavnu tabelu te u njen prvi redak upišemo koeficijente polinoma (sve, uključujući i nule):

$$P(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1$$

	1	0	0	-1
--	---	---	---	----

1. nije nul-točka
2. 1
3. 2
4. 3

U prvi stupac upišimo broj za kojeg provjeravamo je li nul-točka (u našem slučaju $x = 1$):

	1	0	0	-1
1				

Vodeći koeficijent prepisimo ispod (u isti redak u koji smo upisali potencijalnu nul-točku):

	1	0	0	-1
1	1			

Sada najprije pomnožimo (**plava strelica**) potencijalnu nul-točku s koeficijentom u njenom retku te dodajmo (**crvena strelica**) prvi slijedeći koeficijent iz prvog (gornjeg) retka. Dobiveni rezultat upišimo u prvo slobodno mjesto u drugom (donjem) retku (**tamnocrveni broj**):

	1	0	0	-1
1	1	1		

Taj postupak ponavljamo do kraja:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Ako je zadnji dobiveni broj jednak nuli onda je broj koji smo provjeravali nul-točka tog polinoma, a ako na kraju nismo dobili nulu onda testirani broj nije nul-točka polinoma.

U slučaju da je dobiveni broj nul-točka postupak treba ponoviti sve dok na kraju ne dobijemo broj različit od nule. Broj redaka koji su završili s nulom je kratnost testirane nul-točke.

U tablici ispod je proveden kompletan postupak za testiranje je li broj $x = 1$ nul-točka (i koje kratnosti) polinoma $P(x) = x^3 - 1$. Kao što se može vidjeti broj 1 je nul-točka tog polinoma i to kratnosti 1 (pa treba zaokružiti ponuđeni odgovor pod 2 .)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \text{ (nul-točka kratnosti 1)} \\ 1 & 1 & 2 & 3 \neq 0 & \text{(nije kratnosti 2)} \end{array}$$

(odgovor: 2)

10. $x=1$ je nul-točka polinoma $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ kratnosti

Provedemo li gore opisani postupak vidimo da je broj $x = 1$ nul-točka polinoma $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ **kratnosti 2** te treba zaokružiti odgovor pod 3 .

1. nije nul-točka
2. 1
3. 2
4. 3

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \text{ (nul-točka kratnosti 1)} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \text{(nul-točka kratnosti 2)} \\ 1 & 1 & 2 \neq 0 & \text{(nije kratnosti 3)} \end{array}$$

(odgovor: 3)

Komentar:

Ako je $x = x_0$, nul-točka polinoma $P(x)$ kratnosti k tada je polinom $P(x)$ djeljiv s

$$(x - x_0)^k$$

Dakle, gornjim postupkom smo saznali da je polinom $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ djeljiv sa polinomom $(x - 1)^2$