FUNKCIJE

ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI FUNKCIJE

1. Ako je f $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)$, tada je $f(x)$ jednako:

1. x^2-1
2. x^2-2
3. $2(x^2-1)$
4. $2(x^2-2)$

Primijetimo da je argument funkcije $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ jako sličan izrazu $x+\frac{1}{x}$. Stoga uvedimo novu nepoznanicu t na slijedeći način:

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=t$$

a zatim kvadrirajmo cijelu jednadžbu:

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=t^2$$

Nakon sređivanja dobijemo:

$$x+2+\frac{1}{x}=t^2$$

te prebacivanjem broja 2 na desnu stranu:

$$x+\frac{1}{x}=t^2-2$$

Uvrstimo li sada u početnu funkciju $f\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)$ umjesto$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ varijablu t a umjesto $x+\frac{1}{x}$ izraz t^2-2 imamo:

$$f(t)=2(t^2-2)$$

pa je jasno je da je točan odgovor pod rednim brojem 4.

ODREĐIVANJE KODOMENE

2. Kodomena funkcije $f(x)=2x^2-3x$ je

1. $[-1.125,+\infty>$
2. $[1.125,+\infty>$
3. $<-1.125,+\infty>$
4. R

Za kvadratnu funkciju vrijedi da je kodomena funkcije:

$$\begin{cases}[y_0,+\infty>, & ako\ je\ a>0\\ <-\infty,y_0], & ako\ je\ a<0\end{cases}$$

gdje je y_0 y koordinata tjemena.

U našoj funkciji je a = 2 > 0 , a $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{0-9}{8}=-1.125$
Kodomena funkcije je $[-1.125,+\infty>$ te je točan odgovor pod rednim brojem 1.

KOMPOZICIJA FUNKCIJA

3. Za funkciju $f(x) = \frac{2x}{3x+2}$ odredite $f(f(x))$.

$$f(f(x)) = f\left(\frac{2x}{3x+2}\right) = \frac{2\cdot\frac{2x}{3x+2}}{3\cdot\frac{2x}{3x+2}+2} = \frac{\frac{4x}{3x+2}}{\frac{6x}{3x+2}+2} = \frac{\frac{4x}{3x+2}}{\frac{12x+4}{3x+2}} = \frac{4x}{12x+4}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

(odgovor: 1)

1. $\frac{x}{3x+1}$
2. $\frac{x}{3x+2}$
3. $\frac{x}{3x+3}$
4. $\frac{x}{3x+4}$

4. Ako je $f(x) = 9x^4 - 3x^2$ i $g(x) = 2\sqrt{x}$, tada je $(f \circ g)(x)$ jednako

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2\sqrt{x}) = 9(2\sqrt{x})^4 - 3(2\sqrt{x})^2 =$$

$$= 9 \cdot 16x^2 - 3 \cdot 4x = 144x^2 - 12x = 12 \cdot (12x - 1)$$

Dakle, točan odgovor je pod rednim brojem 4.

1. $x(x-1)$
2. $10x(10x-1)$
3. $11x(11x-1)$
4. $12x(12x-1)$

INVERZNA FUNKCIJA

5. Inverzna funkcija funkcije $f(x) = 2x - 3$ je

Potrebno je napraviti zamjene:
umjesto f(x) →x, umjesto x → y te iz tako dobivene jednadžbe izračunati y. To je ujedno inverzna funkcija $f^{-1}(x)$:

$$x = 2y - 3$$
$$-2y = -x - 3 /: (-2)$$
$$y = 0.5y + 1.5$$

Dakle, $y = \boldsymbol{f^{-1}(x) = 0.5x + 1.5}$ pa je točan odgovor pod rednim brojem 1.

1. $f^{-1}(x) = 0.5x + 1.5$
2. $f^{-1}(x) = -0.5x + 1.5$
3. $f^{-1}(x) = 0.5x - 1.5$
4. $f^{-1}(x) = -0.5x - 1.5$

6. Inverzna funkcija funkcije $f(x) = 2\,log_2(2x)$ je:

Kao i u prethodnom zadatku, umjesto f(x) pišemo x, a umjesto x pišemo y te izračunamo y:

$$x = 2\log_2(2y)$$

Najprije dijeljenjem sa 2 dobijemo

$$\log_2(2y) = \frac{x}{2}$$

1. $f^{-1}(x) = 2^{\frac{x-2}{2}}$
2. $f^{-1}(x) = 2^{x-2}$
3. $f^{-1}(x) = 2^{x-1}$
4. $f^{-1}(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

a nakon toga primijenimo definiciju logaritma:

$$\log_{baza}(argument) = eksponent$$
$$\Updownarrow$$
$$argument = baza^{eksponent}$$

iz čega slijedi:

$$2y = 2^{\frac{x}{2}}$$

te nakon dijeljenja sa 2:

$$y = \frac{2^{\frac{x}{2}}}{2} = (dijeljenje\ potencija\ istih\ baza) = 2^{\frac{x}{2}-1} = 2^{\frac{x-2}{2}}$$

te zaključujemo da je točan odgovor pod rednim brojem 1.

7. Inverzna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{6}log(100x^{-2}) + 1$ je:

1. $f^{-1}(x) = 10^{6x-2}$
2. $f^{-1}(x) = 10^{6-2x}$
3. $f^{-1}(x) = 10^{3x-4}$
4. $f^{-1}(x) = 10^{4-3x}$

Ponovimo postupak iz prethodnog zadatka:

$$x = \frac{1}{6}\log(100y^{-2}) + 1$$

$$x - 1 = \frac{1}{6}\log(100y^{-2})\ /\cdot 6$$

$$6x - 6 = \log(100y^{-2}) =$$

Nakon što utvrdimo da je baza = 10, argument = $100y^{-2}$, a eksponent = 6x-6, imamo:

$$100y^{-2} = 10^{6x-6} \Rightarrow \frac{100}{y^2} = 10^{6x-6} \Rightarrow y^2 = \frac{100}{10^{6x-6}} = \frac{10^2}{10^{6x-6}} = 10^{2-6x+6} = 10^{8-6x}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{10^{8-6x}} = 10^{4-3x}$$

Točan je odgovor pod rednim brojem 4.

8. Ako je $f(2x+3) = 3x+2$, tada $f^{-1}(101)$ iznosi:

1. 149
2. 101
3. 81
4. 69

Po definiciji inverzne funkcije vrijedi:

$$f(x) = y \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Stoga, iz $f(2x+3) = 3x+2$ slijedi da je $f^{-1}(3x+2) = 2x+3$
Sada samo treba pronaći onaj x koji će argument 3x+2 *„pretvoriti“* u 101 t.j. riješiti jednadžbu $3x+2 = 101$ i tu vrijednost uvrstiti umjesto x-a u inverznu funkciju:

$$3x + 2 = 101 \Rightarrow 3x = 99 \Rightarrow \boldsymbol{x = 33}$$

$$f^{-1}(3\cdot\mathbf{33}+2) = 2\cdot\mathbf{33}+3 \Rightarrow f^{-1}(101) = 69$$

Dakle, točan odgovor je pod rednim brojem 4.

EKSTREM KVADRATNE FUNKCIJE

9. Funkcija $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ ima *maksimum* jednak 5. Apscisa maksimuma je

1. -4
2. -2
3. 2
4. 4

Kvadratna funkcija ima maksimum ako je njen vodeći koeficijent a negativan. U tom slučaju je vrijednost maksimuma jednaka y koordinati tjemena. Poznato je da su koordinate tjemena

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

Iz toga slijedi da mora biti

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = 5$$

Uvrstimo li vrijednosti koeficijenata b = -2 i c = 1 dobijemo jednadžbu

$$\frac{4a - 4}{4a} = 5$$

nakon čega laganim rješavanjem dobijemo a = -1/4.

No, u zadatku se traži apscisa (x koordinata tjemena) koju dobijemo kao $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot(-1/4)} = \frac{2}{-1/2} = -4$ pa je točan odgovor od rednim brojem 1.

10. Ako proizvodimo x komada nekog proizvoda ostvarujemo novčani prihod $P(x) = 481.5x - 0.75x^2 - 119.75$. Koliki najveći prihod možemo ostvariti u proizvodnji tog proizvoda?

1. 154561
2. 103041
3. 77161
4. 32100

S obzirom da je novčani prihod izražen kao kvadratna funkcija, naći najveći prihod znači naći maksimum kvadratne funkcije P(x) tj. izračunati y koordinatu tjemena:

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-0.75)\cdot(-119.75) - (481.5)^2}{4\cdot(-0.75)}$$

$$y = 77161$$

pa je točan odgovor pod rednim brojem 3.