Metode faktorizacije i primjeri

Prvi korak svake faktorizacije jest provjeriti možemo li izlučiti zajednički član. Često tek nakon izlučivanja zajedničkog člana možemo prepoznati o kojoj se formuli radi. Pogledajmo primjer:

$$36x^2c + 24xbc + 4cb^2 =$$

Tek nakon izlučivanja zajedničkog člana 4c u zagradi prepoznajemo formulu za kvadrat zbroja.

$$= 36x^2c + 24xbc + 4cb^2 = 4c(9x^2 + 6xb + b^2) =$$

Isto tako često puta učenik pogrešno prepoznaje članove formule, pa je potrebno izvšiti drugačiji zapis pojedinih članova kako bi se izbjegla brzopleta pogreška. Brojevi kao što su 4,9,16, 25, 27... moraju odmah „upasti u oči“ jer se radi o brojevima koji su kvadrati ili kubovi brojeva 2,3,5, itd. U prethodnom primjeru uočavamo broj 9 kojega je mudro zapisati kao 3^2 i odmah grupirati sa brojem x jer izraz (3x) predstavlja PRVI član u ovom primjeru. Na taj način lako uočavamo da je (3x) PRVI član, a da je broj (b) DRUGI član.

$$= 4c(9x^2 + 6xb + b^2) = 4c((3x)^2 + 2(3x)b + b^2) = 4c(3x + b)^2$$

Posebno je zanimljiv broj 1 jer to je i kvadrat i kub broja 1 i kao takav može se koristiti i u formuli za kvadrat, ali i kub binoma. Pogledajmo primjer:

$$(27x^3 - 1) = ((3x)^3 - 1^3) = (3x - 1)(9x^2 + 3x - 1)$$

U ovom primjeru broj jedan zapisali smo kao 1^3. U sljedećem primjeru 1 će biti dio formule za razliku kvadrata, pa cemo ga zapisati kao 1^2.

$$(16x^2 - 1) = ((4x)^2 - 1^2) = (4x - 1)(4x + 1)$$

Kao što je u gornjim primjerima već napravljeno drugi korak faktorizacije jest prepoznavanje neke od formula za faktorizaciju. Popis formula za faktorizaciju nalazi se u odvojenom dokumentu. Ponekad u zadatku moramo prepoznati lijevu a ponekad desnu stranu formule, pa je formule najbolje naučiti napamet!

U zadacima u kojima niti nakon izlučivanja i/li uočavanja brojeva koji su kvadrati (ili kubovi) ne uspijemo faktorizirati naš izraz, možemo pokušati primjeniti još neke metode:

a) **Grupiranje dodavanjem novih članova**

Ako dosadašnje metode nisu dale rezultate, možemo pokušati našem izrazu dodati i oduzeti neki broj (to je zapravo dodavanje 0 a to je neutralna operacija). Često je taj broj kvadrat ili kub nekog broja i može se koristiti u formulama za faktoriziranje kako bismo dobili konačno rješenje. Pogledajmo izraz

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 9)$$

Ovaj izraz jako nalikuje desnoj strani formule za kub razlike. **Broj x je naš PRVI, a broj 2 bi bio naš DRUGI. Prva tri člana u potpunosti odgovaraju formuli, ali broj 9 nam ne odgovara jer formula na tom mjestu zahtjeva broj 8.** (drugi na treću 2^3=8)

Sada dolazimo do situacije da izrazu NAMJERNO dodajemo i oduzimamo broj 1

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 9) = x^3 - 6x^2 + 12x - 9 + 1 - 1 =$$

Broj minus jedan NAMJERNO ne pribrajamo broju (-9), nego prepisujemo, dok broj 1 pribrojimo broju -9 jer tako dobivamo traženi broj (-8).

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 9 + 1 - 1 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 1$$

Uočavamo da nam prva 4 člana sada stvarno zadovoljavaju formulu za kub razlike pa možemo primjeniti formulu za taj dio izraza, dok broj (-1) i dalje prepisujemo

$$= (x-2)^3 - 1 =$$

Broj jedan naravno možemo zapisati i kao 1^3, pa možemo prepoznati da se radi o još jednoj formuli, ovoga puta to je formula za razliku kubova. Zagrada predstavlja prvi član te formule, a broj jedan drugi član formule

$$= (x-2)^3 - 1 = (x-2)^3 - 1^3 =$$

Primjenom formule za razliku kubova na gornji izraz dobivamo

$$= (x-2)^3 - 1^3 = ((x-2)-1)((x-2)^2 + (x-2)\cdot 1 + 1^2) =$$
$$= (x-3)(x^2 - 4x + 4 + x - 2 + 1) =$$
$$= (x-3)(x^2 - 3x + 3)$$

b) Faktorizacija rješavanjem kvadratne jednadžbe

Ukoliko trebamo faktorizirati izraz oblika ***(ax^2 + bx + c)*** *trebamo koristiti formulu za rješavanje kvadratne jednadžbe. Ovdje nećemo objašnjavati svojstva i rješenja kvadratne funkcije jer će to biti objašnjeno u posebnom poglavlju. Postoje 2 rješenja ili jedno dvostruko rješenje, a računaju se prema formuli:*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nakon što odredimo rješenja $\mathbf{x_1}$ i $\mathbf{x_2}$ naš izraz možemo zapisati u obliku

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

PRIMJER: Faktorizirati izraz $2x^2 + 5x - 12$

Uočavamo koeficijente a=2, b=5, c= (-12) i uvrstimo ih u gornju formulu:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4}$$

Prvo rješenje $\mathbf{x_1}$ dobiti ćemo ako uzmemo predznak (+), a drugo $\mathbf{x_2}$ ako uzmemo predznak (–) na mjestu gdje imamo ±. Dakle....

$$x_1 = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{-5 - 11}{4} = \frac{-16}{4} = (-4)$$

Sada naš izraz možemo napisati kao umnožak dviju zagrada....

$$2x^2 + 5x - 12 = (x - \frac{3}{2})(x + 4)$$