1. FUNKCIJE, LIMES, NEPREKINUTOST

1.1 Brojevi - slijed, interval, limes

Slijed realnih brojeva je postava brojeva na primjer u obliku $1,2,3...,n,n+1...$ koji na realnoj x osi imaju oznaceno mjesto odgovarajucom tockom.
Za svaki broj, za koji vrijedi $a \le x \le b,$ a i b su granice intervala i u ovom slucaju je to zatvoren interval $[a,b]$. Ako vrijedi $a < x < b,$ tada je (a,b) otvoreni interval. Interval moze biti otvoren ili zatvoren, zatvoren samo sa lijeve ili samo sa desne strane.
Slijed je brojiv, ako se svakom clanu slijeda moze pridruziti odgovarajuci realni broj u obliku jedan prema jedan:

	Slijed neparnih brojeva	1	3	5	7	9	...
jedan prema jedan:		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
	Pridruzimo realne brojeve	1	2	3	4	5	6

Broj clanova slijeda moze biti konacan ili beskonacan.

Slijed racionalnih brojeva je konacno brojiv a slijed na pr. iracionalnoh brojeva ili realnih brojeva je konacno nebrojiv. Broj clanova se oznacava sa $\aleph_0$ (elphi nula) i naziva se i kardinalni broj C.
Slijed brojeva x za koje vrijedi da je $|x-a| < \delta$ gdje je $\delta > 0,$ naziva se δ okolis tocke a.
Kada je $0 < |x-a| < \delta \;\; (x \ne a)$, δ je brisani okolis broja a.
Tocka gomilanja, granicna tocka slijeda, je broj A za koji vrijedi da svaki brisani δ okolis tocke A sadrzi clanove slijeda. Znaci, da za svaki po volji mali $\delta > 0$ moze se naci clan slijeda, broj x, koji nije jednak A ali vrijedi $|x-A| < \delta$. Za vrlo mali δ mora biti konacni broj clanova sa vrijednosti x. Slijed koji sadrzi sve svoje granicne tocke, zovemo zatvorenim slijedom.
Ako za sve brojeve $x,$ slijeda, postoji broj M gdje vrijedi $x \le M$, slijed je ogranicen sa gornje strane a M je gornja granica. Slicno, za $m \ge x$, broj m je donja granica. Za sve x za koje vrijedi $m \ge x \le M$ kazemo da je slijed ogranicen.
Weierstrass-Bolzano-v teorem tvrdi da svaki ograniceni slijed ima barem jednu granicnu tocku.

1. Imamo slijed koji je nastao od dva slijeda: A i B, oba slijeda su brojiva. Dokazi da je novonastali slijed brojeva takodjer brojiv.

	a_1	a_2	a_3	...		b_1	b_2	b_3	...
Za lijed A vrijedi:	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	Za lijed B vrijedi:	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
	1	2	3	...		1	2	3	...

Za novonastali slijed mozemo sada imati dva slucaja:

	Clanovi A i B	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	...	
a) Elementi u A i B su rasliciti:		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	slijed je brojiv.
	Prirodni brojevi	1	2	3	4	5	...	

b) Neki clanovi su jednak a neki se razlikuju. Isti postupak mozemo primijeniti na clanove koji se razlikuju. Zakljucujemo, slijed je brojiv.

Slijed sastavljen od svih clanova A ili B ili oba, naziva se unija od A i B i oznacava se sa $A \cup B$ ili $A + B$.

Slijed sastavljen od jednakih clanova u A ili B slijeda , naziva se presjek A i B i oznacava se sa $A \cap B$ ili $A \cdot B$.

Slijed sastavljen od clanova u A ali ne od clanova u B, naziva se razlika A i B i oznacava se sa $A - B \;=\; A\overline{B}$.

2. Dokazi da je slijed racionalnih brojeva izmedju 0 i ukljucivsi 1, brojiv.

Predstavimo brojeve slijeda u obliku razlomaka i pridruzimo jedan prema jedan, prirodne brojeve:

Racionalni brojevi:	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Prirodnibrojevi :	1	2	3	4	5	...

Vidimo da je slijed brojiv izmedju 0 i ukljucivsi jedan jer mozemo pridruziti prorodne brojeve

3. Dokazi da slijed realnih brojeva u zatvorenom intervalu $[0,1]$ nije brojiv.

Svaki realni broj u $[0,1]$ moze se prikazati sa decimalnim znamenkama oblika $.a_1a_2a_3...$ gdje je sa a osnacena bilo koja znamenka 0,1,2,3,...9. Na primjer broj 0.653 mozemo napisati kao 0.6530000... i to je isto kao i 0.6529999.... Ako su realni brojevi u $[0,1]$ brojevi, mozemo napisati

	$0.a_{11}a_{12}a_{13}$	$0.a_{21}a_{22}a_{23}$	$0.a_{31}a_{32}a_{33}$	...
znani odnos:	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
	1	2	3	...

Napravimo novi broj $0.b_1b_2b_3$ tako da vrijedi $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, b_3 \neq a_{33}$. Taj novi broj u $[0,1]$ je razlicit i ne mozemo pridruziti prirodne brojeve kao gore. Znaci da je slijed nebrojiv.

4. Dokazi da slijed brojeva $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ ima granicu. Utvrdi koja je najniza gornja granica i najvisa donja granica. Dokazi da je 0 granica (limes) slijeda. Utvrdi da li je slijed zatvoren.

- Slijed ima granicu, jer je svaki clan manji od na pr. $\frac{3}{2}$ i veci od na pr. -1. Slijed je orgranicen.
- Slijed nema veceg clana od 1 i ima barem jedan clan koji je veci od $1-\varepsilon$, za svaki pozitivni broj ε. Znaci da je 1 najniza gornja granicna vrijednost slijeda.
- Slicno, nema manjeg broja od 0 i ima barem jedan clan koji ima vrijednost $0+\varepsilon$, za svaki pozitivn Znaci da je 0 najvisa donja granicna vrijednost slijeda.
- Uzmemo bilo koji clan x slijeda. Moze se uvijek naci takav x da vrijedi $0<|x|<\delta$ za svaki pozitivni broj δ, a to snaci da je 0 granica odnosno limes zadanog slijeda.
- Slijed nije zatvoren jer 0 nije clan slijeda.

1.2 Pojam funkcije, graf funkcije, vrste funkcija

Funkcija je pojam kojim je definiran odnos dva slijeda brojeva ili opcenito odnos dviju velicina. Ako svakoj vrijednosti jedne velicine, zvane nezavisna promjenjiva x, druga velicina poprima jednu ili vise vrijednosti, tada je odnos funkcionalni i ta druga velicina je funkcija ili zavisna promjenjiva obicno oznacena sa y ili $f(x)$. Odnos se pise u obliku $y=f(x), y=G(x), F(x,y)$ i tome slicno.
Vrijednosti koje nezavisna promjenjiva ili argument x moze poprimiti naziva se podrucje definiranosti ili domena funkcije. Oznacava se sa na pr. $[\mathrm{a,b}]$ zatvoreni interval ili $(\mathrm{a,b})$ otvoreni interval.
Graf funkcije je slikoviti prikaz odnosa $y=f(x)$ u obicno, pravokutnom koordinatnom sustavu u obliku krivulje koja spaja parove tocaka x i $f(x)$.
Jednoznacna funkcija je ona funkcija, koja za jednu vrijednost argumenta x poprima samo jednu vrijednost y.
Viseznacna funkcija je ona funkcija, koja za jednu vrijednost argumenta x poprima vise vrijednosti za y.
Monotono rastuca funkcija u nekom intervalu, je ona funkcija koja za dvije vrijednosti x_1 i x_2 unutar intervala i $x_1 \leq x_2$ ima $f(x)_1 \leq f(x)_2$. Za $f(x)_1 < f(x)_2$, funkcija je strikno rastuca.
Monotono padajuca funkcija u nekom intervalu, je ona funkcija koja za dvije vrijednosti x_1 i x_2 unutar intervala i $x_1 \leq x_2$ ima $\mathrm{f}(x)_1 \geq \mathrm{f}(x)_2$. Za $f(x)_1 > f(x)_2$, funkcija je strikno padajuca.
Ako postoji takav broj M da je $f(x) \leq M$ za svako x unutar intervala, tada je slijed brojeva ogranicen sa gornje strane i tocka M je gornja granica funkcije.
Ako postoji takav broj m da je $f(x) \geq m$ za svako x unutar intervala, tada je slijed brojeva

ogranicen sa donje strane i tocka m je donja granica funkcije.

5. Primjer jednoznacne funkcije $y = f(x) = x^2$ u intervalu $-1 \le x \le 1$:

   Domena je u intervalu $-1 \le x \le 1 \Rightarrow y = f(x) = x^2 \qquad \Rightarrow f_{(-1)} = (-1)^2 = 1, f_{(1)} = (1)^2 = 1$

   Svakoj vrijednosti za x imamo jednu vrijednost za y.

6. Primjer dvoznacne funkcije $y = f(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ u intervalu $[-1,1]$:

   $y = f(x) = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f_{(-1)} = \pm\sqrt{1-(-1)^2} = 0, \quad f_{(1)} == \pm\sqrt{1-(1)^2} = 0$

   Dalje imamo: $y_{(0)} = \pm\sqrt{1-(0)^2} = \pm 1$

   Svakoj vrijednosti za x imamo dvije vrijednost za y. Zadani primjer je kruznica sa sredistem u ishodistu radijusa 1: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$

7. Primjer granice funkcije: Funkcija $y = x + 3$ u intervalu $-1 \le x \le 1$ ima slijedece vrijednosti: $y = x + 3 \Rightarrow y_{(-1)} = (-1) + 3 = 2 \qquad y_{(1)} = (1) + 3 = 4$

   Funkcija ima gornju granicu 4 i donju granicu 2.

8. Primjer granice funkcije: Funkcija $y = \dfrac{1}{x}$ u intervalu $0 < x < 4$ ima slijedece vrijednosti:

   $y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y_{(0)} = \dfrac{1}{0}$ Za dovoljno mali x funkcija porima veliku vrijednost, nije ogranicena.

   $y_{(4)} = \dfrac{1}{4}$ Za $x = 4$ funkcija ima donju granicu $m = \dfrac{1}{4}$.

9. Zadana je funkcija $f(x) = (8-x)(x-2)$ u intervalu $2 \le x \le 8$.

   $a)$Izracunaj $f(6)$ i $f(-1)$. b)Koje je podrucje definiranosti funkcije?

   $c)$Izracunaj $f(1-2t)$ i definiraj domenu. $d)$Izracunaj $f[f(3)], f[f(5)]$ $e)$Nacrtaj graf $f(x)$.

   $a) f(6) = (8-6)(6-2) = 4 \cdot 2 = 8$

   $f(-1) \Rightarrow$ funkcija nije definirana jer -1 je van zadanog intervala.

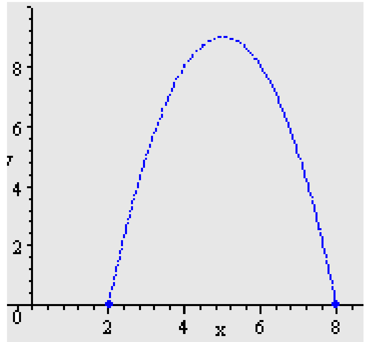
   $b)$Podrucje definiranosti su svi brojevi unutar zatvorenog intervala $[2,8]$

   $c) f(1-2t) = \{8-(1-2t)\}\{(1-2t)-2\} = (7+2t)(-1-2t)$ i mora zadovoljavati uvjete

   $2 \le (1-2t) \le 8 \Leftrightarrow 2 \le 1-2t \Rightarrow t \le -\dfrac{1}{2} \quad 1-2t \le 8 \Rightarrow t \ge -\dfrac{7}{2} \Rightarrow \qquad \underline{-\dfrac{7}{2} \le t \le -\dfrac{1}{2}}$

   $d) f(3) = (8-3)(3-2) = 5 \; f[f(3)] = f(5) = (8-5)(5-2) = 9$ odnosno

$f\left[f(5)\right]=f(9)$ nije definirano



10. Izrazi funkciju $f^{-1}(x)$ za funkciju iz gornjeg zadatka i nacrtaj graf i dokazi da je funkcija viseznacna.

$f(x)=(8-x)(x-2)\Rightarrow y=8x-16-x^2+2x\Rightarrow x^2-10x+(16+y)=0$

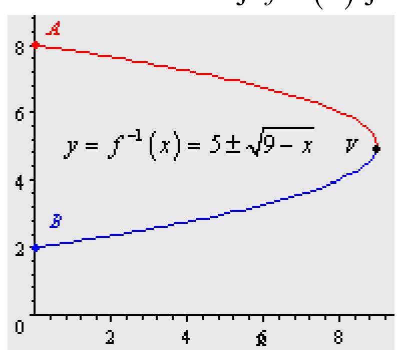
Rjesimo po x : $x_{1,2}=f^{-1}(y)=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{10\pm\sqrt{10^2-4(16+y)}}{2}=$

$=\dfrac{10\pm\sqrt{36-4y}}{2}=\dfrac{10\pm 2\sqrt{9-y}}{2}=5\pm\sqrt{9-y}$ zamijenimo nepoznanice:

$\underline{y=f^{-1}(x)=5\pm\sqrt{9-x}}$

Dio grafa AV, je predstavljen sa $y=5+\sqrt{9-x}$, a dio VB sa $y=5-\sqrt{9-x}$.

Za sve vrijednosti x, u intervalu $0\le x<9$ funkcija $f^{-1}(x)$ je dvoznacna.



11. Dokazi da je funkcija $y=f(x)=5+\sqrt{9-x}$, striktno padajuca u intervalu $0\le x\le 9$ i ispitaj da li je monotono padajuca u istom intervalu. Da li funkcija ima jednoznacnu inverznu funkciju?

1) Funkcija je striktno padajuca ako $f(x_1)>f(x_2)$ kada je $x_1<x_2$. Znaci da za : $x_1<x_2$ imamo

$9-x_1>9-x_2\Rightarrow\sqrt{9-x_1}>\sqrt{9-x_2}\Rightarrow 5+\sqrt{9-x_1}>5+\sqrt{9-x_2}$

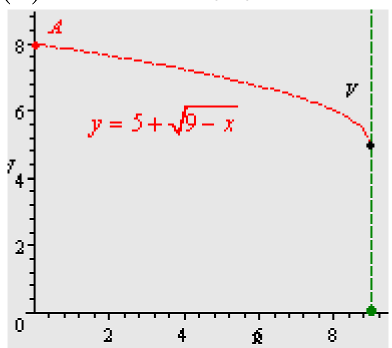
Funkcija je striktno padajuca.

2) Iz $f(x_1) > f(x_2)$ zakljucujemmo, funkcija je ujedno i monotono padajuca.

3) Rijesimo $y = f(x) = 5 + \sqrt{9-x}$ po $x :\Rightarrow y - 5 = \sqrt{9-x} \quad /^2 \Rightarrow (y-5)^2 = 9 - x$

$y^2 - 10y + 25 = 9 - x \Rightarrow \; x = -y^2 + 10y - 16 \Rightarrow \underline{x = (y-2)(8-y)}$

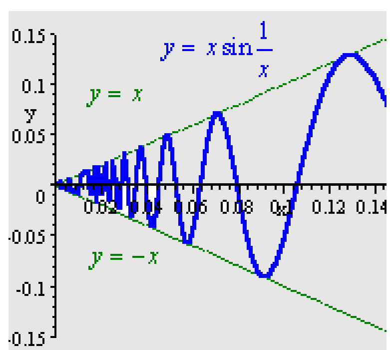
Inverzna funkcija funkcije $f(x) = 5 + \sqrt{9-x}$ je jednoznacna.



12. Zadana je funkcija $y = f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x}, x > 0 \\ 0, \quad\quad x = 0 \end{cases}$. Konstruiraj graf funkcije.

Analizirajmo izraz $x \sin\dfrac{1}{x}$: $\quad y = f(x) = 0$ kada je $\sin\dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} = k\pi \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

odnosno, kada je $x = \dfrac{1}{\pi}, \dfrac{1}{2\pi}, \dfrac{1}{3\pi}$...Graf je omedjen sa dva pravca, $y = x$ i $y = -x$.



Slijedece vrste funkcija se cesto susrecu:

1. Cijela racionalna funkcija ili funkcija polinoma

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$

Koeficijenti $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ su konstante a n je stupanj polinoma.

Za $n = 0$ funkcija ima oblik $P_0(x) = a_0$ i graf je pravac paralelan sa osi x.

Za $n = 1$ funkcija ima oblik $P_1(x) = a_1 x + a_0$ i graf predstavlja pravac.

koeficijent $a_1 = \tan\alpha = \dfrac{y}{x} \Rightarrow$ koeficijent smjera, $a_0 \Rightarrow$ odsjecak pravca na osi y.

Za $n = 2$ funkcija ima oblik $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ graf je kvadratna funkcija.

Za $n = 3$ funkcija ima oblik $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ grafje kubna funkcija.

2. Razlomljena racionalna funkcija $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

   U brojniku i nazivniku su polinomi ogovarajuceg stupnja.

   Nultocke razlomljene racionalne funkcije su tocke u kojima $R(x) = 0$

   Polovi razlomljene racionalne funkcije su tocke u kojima $R(x)$ poprima beskonacnu vrijednost $\pm\infty$.

3. Algebarska funkcija ima oblik $p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + ...p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x) = 0$

   Koeficijenti $p_n(x)...p_0(x)$ su polinomi od x. Primjer su $y = \sqrt{x}, y^2 = 2px$

4. Transcedentne funkcije: su sve ostale funkcije koje ne spadaju u gornje grupe
   a) Trigonometrijske funkcije, su oblika: $y = \sin x, y = \tan x$
   b) Inverzne Trigonometrijske funkcije, su oblika: $y = \sin^{-1} x, y = \tan^{-1} x$
   c) Hiperbolne funkcije, su oblika: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
   d) Inverzne Hiperbolne funkcije, su oblika: $y = \sinh^{-1} x, y = \tanh^{-1} x$
   e) Eksponencijalne funkcije, su oblika: $y = f(x) = a^x$
      Funkcija je inverzna logaritamskoj funkciji.
   f) Logaritamske funkcije, su oblika: $y = f(x) = \log_a x$
      Funkcija je inverzna eksponencijalnoj funkciji.

Granicna vrijednost funkcije $f(x)$ je vrijednost L; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$: kada nezavisna promjenjiva x, tezi prema vriednosti x_0, $x \to x_0$; kada za neki mali broj ε mozemo naci pozitivni broj δ (koji je obicno ovisan o ε)tako da je $|f(x) - L| < \varepsilon$,

kada je $0 < |x - x_0| < \delta$

Drukcije receno: Apsolutna vrijednost razlike $|f(x) - L|$ moze se napraviti po volji malom ako izaberemo vrijednost za x dovoljno blizu vrijednosti x_0.

Nezavisna promjenjiva x moze poprimati vrijednosti i priblizavati se tocki x_0 bilo sa desne ili lijeve strane.

Oznacimo li priblizavanje sa desne strane izrazom $x \to x_{0+}; f\left(x_{0+}\right)$ a priblizavanje s lijeva, sa $x \to x_{0-}; f\left(x_{0-}\right)$ tada imamo: $\lim\limits_{x \to x_{0+}} = L_D$ limes kada se priblizavamo sa desne strane.

$\lim\limits_{x \to x_{0-}} = L_L$ limes kada se priblizavamo sa lijeve strane.

Limes funkcije $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = L$ postoji onda i samo onda kada je $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to x_{0-}} f\left(x\right) = L$

Pravila za limes funkcija: Ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = A$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g\left(x\right) = B$ tada vrijedi:

$a)$ $\lim\limits_{x \to x_0}\left[f\left(x\right) + g\left(x\right)\right] = \lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) + \lim\limits_{x \to x_0} g\left(x\right) = A + B$

$b)$ $\lim\limits_{x \to x_0}\left[f\left(x\right) - g\left(x\right)\right] = \lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) - \lim\limits_{x \to x_0} g\left(x\right) = A - B$

$c)$ $\lim\limits_{x \to x_0}\left[f\left(x\right) \cdot g\left(x\right)\right] = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right)\right] \cdot \left[\lim\limits_{x \to x_0} g\left(x\right)\right] = A \cdot B$

$d)$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right)}{\lim\limits_{x \to x_0} g\left(x\right)} = \dfrac{A}{B} \qquad B \neq 0$

Posebni limesi: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim\limits_{x \to x_{0+}} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln x} = 1$

13. Zadana je funkcija $y = f\left(x\right) = x^2$. Dokazi da je $\lim\limits_{x \to 2} f\left(x\right) = 4$.

$y = f\left(x\right) = x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f\left(x\right) = 4$

Rjesenje se svodi na slijedece: Mora se dokazati da se za svaki dani $\varepsilon > 0$

moze naci δ>0 (koji je ovisan o ε) tako, da je $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon,$ kada je $0 < \left|x - 2\right| < \delta$

Ako izaberemo $\delta \leq 1,$ tada je $0 < \left|x - 2\right| < 1$ odnosno nakon sredjivanja: $0 < x < 3, x \neq 2$

Tada je $\left|x^2 - 4\right| = \left|\left(x - 2\right)\left(x + 2\right)\right| = \underbrace{\left|x - 2\right|}_{\delta}\left|x + 2\right| < \delta\left|x + 2\right| < \delta\left(3 + 2\right) < 5\delta$

Sada imamo izbor sa $\delta = 1$ ili $\dfrac{\varepsilon}{5}$, zavisi koji je manji, pa je onda $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon,$

kada je $0 < \left|x - 2\right| < \delta.$

Rijesimo to sa konkretnim brojevima: Zelimo da je $\left|x^2 - 4\right| < 0.05$

Apsolutna vrijednost razlike funkcijske vrijednosti i limesa L u promatranoj tocki je mala, po nasoj volji, 0.05. Izaberimo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5} = \dfrac{0.05}{5} = 0.01$

Ako je $0 < \left|x - 2\right| < 0.01$ onda je $\left(2 - 0.01\right) < x < \left(2 + 0.01\right) \Rightarrow \underline{1.99 < x < 2.01}, \left(x \neq 2\right)$ i

$1.99^2 < x^2 < 2.01^2 \Rightarrow \underline{3.9601 < x^2 < 4.0401}$ ili $\quad (3.9601-4) < \left|x^2-4\right| < (4.0401-4)$

$\underline{-0.03961 < \left|x^2-4\right| < 0.0401}$ i za sigurno je $\left|x^2-4\right| < 0.05$ uz $\left(x^2 \neq 4\right)$

14. Dokazi da je $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} = -8.$

Rjesenje se svodi na slijedece: Mora se dokazati da se za svaki dani $\varepsilon > 0$

moze naci δ>0 (koji je ovisan o ε) tako, da je $\left|\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}-(-8)\right| < \varepsilon,$

kada je $0 < |x-1| < \delta$

Funkciju mozemo napisati i kao: $\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} = \dfrac{(x-1)\left(2x^3-4x^2-3x-3\right)}{x-1} =$

$= 2x^3-4x^2-3x-3$

Za jednakost $\left(2x^4-6x^3+x^2+3\right) = (x-1)\left(2x^3-4x^2-3x-3\right)$ vidi postupak na rjesavanja u dijelu srednjoskolske matematike: Linearne Jednadzbe.

Znaci da za svaki $\varepsilon > 0$ mora postojati δ>0 tako da je $\left|\left(2x^3-4x^2-3x-3\right)-(-8)\right| < \varepsilon$

$\left|2x^3-4x^2-3x+5\right| < \varepsilon$ kada je $0 < |x-1| < \delta.$

Izaberimo $\delta \leq 1$: $\;0 < |x-1| < \delta \Rightarrow 0 < |x-1| < 1 \Rightarrow \underline{0 < x < 2,\ x \neq 1}$

Sada koristeci isti postupak kao ranije, rastavimo: $\left|2x^3-4x^2-3x+5\right|$ u izraz:

$\left|2x^3-4x^2-3x+5\right| = \underbrace{|x-1|}_{\delta}\left|2x^2-2x-5\right| < \delta\left|2x^2-2x-5\right| < \delta\left(\left|2x^2\right|+|2x|+|5|\right) <$

$< \delta\left(\left|\left(2\cdot 2^2\right)\right|+|2\cdot 4|+|5|\right) < 17\delta$

Rijesimo to sa konkretnim brojevima: Zelimo da je $\left|\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}-(-8)\right| < 0.5$

Apsolutna vrijednost razlike funkcijske vrijednosti i limesa L u promatranoj tocki je mala, po nasoj volji, 0.05. Izaberimo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{17} = \dfrac{0.5}{17} = 0.029$

Ako je $0 < |x-1| < 0.01$ onda je $(1-0.029) < x < (1+0.029)$

$\underline{0.971 < x < 1.029}, (x \neq 1) \Rightarrow \left|\dfrac{2(0.99)^4-6(0.99)^3+(0.99)^2+3}{(0.99)-1}\right| <$

$< \left|\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}-(-8)\right| < \left|\dfrac{2(1.01)^4-6(1.01)^3+(1.01)^2+3}{(1.01)-1}\right|$

$\underline{-7.9498 < |f(x)-(-8)| < -8.0498}$ ili $(-7.8534+8) < |f(x)-L| < (-8.1433+8)$

$\underline{0.145 < \left|f(x) - L\right| < -0.1433}$ i za sigurno je $\left|f(x) - L\right| < 0.5$ uz$(x \neq 1)$

15. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(2x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2}(2x+1) = 4 + 1 = 5$$

16. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2 - 6x + 4\right)$

$$\lim_{x \to 2}\left(x^2 - 6x + 4\right) = \lim_{x \to 2}\left(x^2\right) + \lim_{x \to 2}(-6x) + \lim_{x \to 2}(4) = 4 - 12 + 4 = -4$$

17. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 2 + 2 = 2$$

18. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{3x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{3x - 1}{3x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{\cancel{(3x-1)}}{\cancel{(3x-1)}(x+2)} = \lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{6}{3}} = \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$$

19. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^4 - 3x^2 + 1}{6x^4 + x^2 - 3x}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{6x^4 + x^2 - 3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^4}{x^4} - \frac{3x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} + \frac{x^2}{x^4} - \frac{3x}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{6 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x \to \infty}(2) + \lim\limits_{x \to \infty}\left(-\frac{3}{x^2}\right) + \lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}(6) + \lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \lim\limits_{x \to \infty}\left(-\frac{3}{x^3}\right)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

20. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 + 3}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

U zadacima 7. i 8. brojnik i nazivnik smo podijelili sa najvisom potencijom

21. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{4+x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{4+\cancel{x}-4}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+x}-2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{4+x}-2\right)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

22. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x}\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$

23. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}x=2$

24. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)=-2$

25. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{3-x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(3-x)(-x-1)}{(3-x)}=\lim\limits_{x\to 3}(-x-1)=-4$

26. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-1)^2-1}{2x-2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[(2x-1)-1][(2x-1)+1]}{2x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-2)2x}{(2x-2)}=$

$$=\lim_{x\to 1}2x=2$$

27. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^2-4}{x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(2+x)-2][(2+x)-2]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(4+x)}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}(4+x)=4$$

28. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-2x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-2}=\dfrac{0}{0-2}=0$

29. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{x^2-2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\dfrac{3+0}{1-0}=3$

30. Izracunaj limes: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-6}{x^2-3}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}}=\dfrac{0-0}{1-0}=0$

1.3 Neprekinutost funkcija

Za neku jednoznacnu funkciju $f(x)$ kazemo da je neprekinuta ili kontinuirana za sve vrijednosto od x u neposrednoj blizini $x = x_0$ i u samoj tocki x_0 ako zu zadovoljeni slijedeci uvjeti:

1. Funkcija ima limes: $\lim\limits_{x\text{-}x_0} f(x) = f(x_0)$
2. Funkcija je definirana na mjestu $f(x_0)$
3. $f(x_0) = L$ $\quad L$ oznacava vrijednost za limes funkcije.
4. Funkcija ima jednake limese s lijeve i s desne strane:

$\lim\limits_{x\text{-}x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\text{-}x_0-} f(x) = L_L = L_D = \lim\limits_{x\text{-}x_0} f(x) = f(x_0) = L$

Tocke u kojima funkcija nije neprekinuta, zovu se tocke prekinutosti ili tocke diskontinuiteta. Ako je funkcija neprekinuta samo za $x \geq x_0$ onda kazemo da je funkcija neprekinuta samo sa desne strane (kako se priblizavamo tocki x_0 $\lim\limits_{x\text{-}x_{0+}} f(x) = f(x_0)$ ili $f(x_{0+}) = f(x_0)$; odnosno

Ako je funkcija neprekinuta samo za $x \leq x_0$ onda kazemo da je funkcija neprekinuta samo sa lijeve strane (kako se priblizavamo tocki x_0 $\lim\limits_{x\text{-}x_{0-}} f(x) = f(x_0)$ ili $f(x_{0-}) = f(x_0)$.

Teoremi neprekinutosti funkcija:

1. Ako su dvije funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekinute u tocki $x = x_0$, tada su neprekinute i funkcije $f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ \ f(x)\cdot g(x)$ i $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ uz $g(x_0) \neq 0$.
2. Slijedece funkcije su neprekinute u svaskom konacnom intervalu: sve funkcije polinoma, $\sin x,\ \cos x$ i $a^x\ (a > 0)$, te njihove inverzne funkcije.
3. Ako je funkcija neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a,b]$, ona je i ogranicena u tom intervalu.
4. Ako je funkcija neprekinuta u $x = x_0$ i $f(x_0) > 0$, (ili $f(x_0) < 0$) tada postoji tocka intervala $x = x_0$ u kojem je $f(x) > 0$, (ili $f(x) < 0$).
5. Ako je funkcija neprekinuta u nekom intervalu i striktno rastuca ili padajuca, njena inverzna funkcija je jednoznacna, neprekinuta i strikno rastuca ili padajuca.
6. Ako je funkcija neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a,b]$ i ako je $f(a) = A$ i $f(b) = B$, tada postoji vrijednost c unutar intervala, za koju vrijedi $f(c) = C$.
7. Ako funkcija zadovoljava gornje uvjete a limesi su suprotnog predznaka, postoji barem jedna vrijednost c za koju je $f(c) = 0$
8. Ako je funkcija neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a,b]$ onda u tom intervalu ima

maksimalnu vrijednost Max ili minimalnu vrijednost min za barem jednu vrijednost unutar intervala.

9. Kompozicija funkcija, $K = g\left[f(x)\right]$ je neprekinuta ako su obje funkcije neprekinute: $y = f(x)$ u $x = x_0$ i $K = g(y)$ u $y = y_0$ i ako je $y_0 = f(x_0)$.

Funkcija koja je definirana u nekom intervalu je jednoliko neprekinuta (uniformno kontinuirana) ako se za po volji izabrani broj $\varepsilon > 0$ moze naci $\delta > 0$ takav, da za svake dvije vrijednosti x i x_0 tog intervala vrijedi:

$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon$ kada je $\left|x_1 - x_2\right| < \delta$

31. Ispitaj neprekinutost funkcije: $y = f(x) = \sin x$ za bilo koji $x = x_0$.

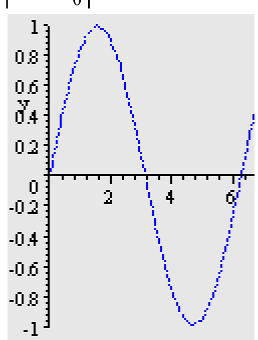
Postavimo uvjete prema definiciji:

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| = \left|\sin x - \sin x_0\right| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|$$

$\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| < \left|\frac{x - x_0}{2}\right|$ $\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le 1 \Rightarrow$ $\left|\sin x - \sin x_0\right| < 2 \cdot 1 \cdot \frac{x - x_0}{2}$ ili

$\left|\sin x - \sin x_0\right| < \left|x - x_0\right|$ i posto $x \to x_0$ $(x - x_0) \to 0$

$\left|\sin x - \sin x_0\right| < \varepsilon$ kada je $\left|x - x_0\right| < \delta$ Funkcija je neprekinuta za sve $x = x_0$.



32. Ispitaj neprekinutost funkcije: $y = x^2$ za $x = 2$. Utvrdi da li je funkcija uniformno neprekinuta u intervalu $0 < x < 1$. *a*) Izracunajmo limes funkcije: $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$ funkcija ima limes, $f(2)$=4, pa je neprekidna

b) Koristimo teorem o neprekidnosti: $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$ kada $\left|x - x_0\right| < \delta$

$$\left|f(x) - f(2)\right| = \left|x^2 - 4\right| < \varepsilon \quad \text{kada } \left|x - 2\right| < \delta.$$

U ranijem zadatku je dokazano da su uvjeti zadovoljeni za $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

Da bi bila uniformno neprekinuta, funkcija mora zadovoljiti uvjete:

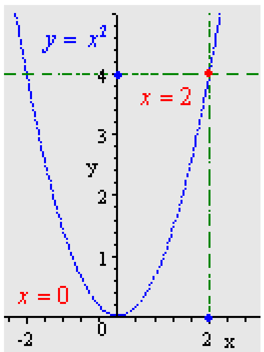
$\left|f(x)-f(x_0)\right| = \left|x^2-x_0^2\right| < \varepsilon$ kada $\left|x-x_0\right| < \delta$ $\quad$ (δ ovisi samo o ε)

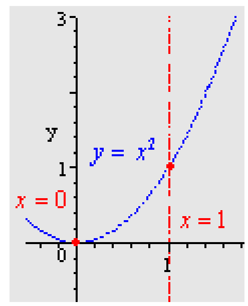
Za bilo koje dvije tocke u zadanom intervalu vrijedi:

$\left|x^2-x_0^2\right| = \left|x+x_0\right|\left|x-x_0\right| < \left|1+1\right|\left|x-x_0\right| = 2\left|x-x_0\right|$ $\quad$ i za $\left|x-x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|x^2-x_0^2\right| < 2\delta$

Uvjeti su zadovoljeni za izabrani $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Funkcija $y = x^2$ je uniformno neprekinuta u intervalu $0 < x < 1$.



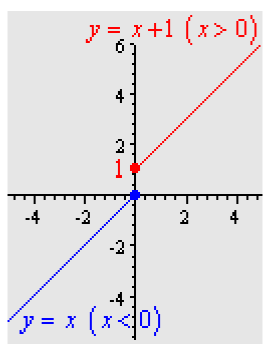


33. Ispitaj neprekinutost funkcije: $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ u tocki $x = 0$

Iz grafa funkcije je vidljivo da $y = x$ za $x < 0$ ima prekid i $\lim\limits_{x=0} f(x) = L_1 = 0$

$y = x+1$ za $x > 0$ ima prekid i $\lim\limits_{x=0} f(x) = L_2 = 1$

Limesi nisu jednaki, pa funkcija nije neprekinuta. Tocka $x = 0$ je tocka diskontinuiteta ili tocka prekinutosti funkcije.



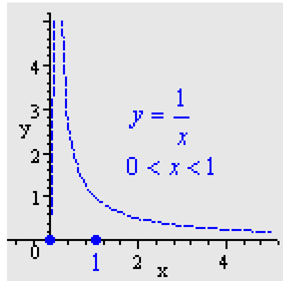
34. Dokazi da funkcija $y = \dfrac{1}{x}$ nije jednoliko neprekinuta u intervali $0 < x < 1$. koristeci definiciju:

$\left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon$ kada $\left|x-x_0\right| < \delta$

Za $x = \delta$ i $x_0 = \dfrac{\delta}{1+\varepsilon}$ imamo: $\left|x-x_0\right| = \left|\delta - \dfrac{\delta}{1+\varepsilon}\right| = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\delta < \delta$ odnosno

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{1}{\delta}-\frac{1+\varepsilon}{\delta}\right| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon \ \left(0<\delta<1\right)$$ i uvjet nije zadovoljen.

Funkcija nije jednoliko neprekinuta u intervalu $0<x<1$.



35. Zadana je funklcija $f\left(x\right)=2x^3-3x^2+7x-10$. Dokazi da je $f\left(x\right)=0$ u intervalu $1<x<2$.

Kako se ta vrijednost izracuna?

Izracunajmo vrijednost funkcije u tockama intervala:

$f\left(x\right)=f\left(1\right)=2\left(1\right)^3-3\left(1\right)^2+7\left(1\right)-10=-4$

$f\left(x\right)=f\left(2\right)=2\left(2\right)^3-3\left(2\right)^2+7\left(2\right)-10=8$

Iz teorema o neprekinutosti (7): unutar intervala mora postojati tocka c, za koju je

$f\left(x\right)=f\left(c\right)=0 \qquad f\left(1\right)<0 \qquad f\left(2\right)>0$

Nadjimo tu tocku, koja je izmedju 1 i 2:

Probajmo sa $x=1.5$: $f\left(x\right)=f\left(1.5\right)=2\left(1.5\right)^3-3\left(1.5\right)^2+7\left(1.5\right)-10=0.5$

nastavimo sa $x=1.4$: $f\left(x\right)=f\left(1.4\right)=2\left(1.4\right)^3-3\left(1.4\right)^2+7\left(1.4\right)-10=-0592$

Trazena tocka je izmedju 1.4 i 1.5. Tocna vrijednost iznosi $x=1.46$