6. BESKONACNI REDOVI

Ako su $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ sume prvih n clanova beskonacnog niza tada je beskonacni red prikazan izrazom: $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n + ...$ $\quad s_1 = u_1 \quad s_2 = u_1 + u_2 \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3$

Beskonacni red je konvergentan ako se moze naci broj S_n, za koji vrijedi:

$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \quad S$ je u tom slucaju suma beskonacnog reda.

Beskonacni red je divergentan ako nema broja S_n, za kojeg vrijedi gornja tvrdnja

U tom slucaju vrijedi: $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ odnosno $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

Nuzan uvjet konvergencije beskonacnog reda: $\sum u_n$ konvergira kada vrijedi : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Dovoljan i nuzan uvjet za konvergenciju beskonacnog reda: $\lim_{r\to\infty} \left| u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + ... + u_{n+r} \right| = 0$

Mnozenje svakog clana beskonacnog reda sa brojem razlicitim od nule, ne mijenjaju se njegova svojstva konvergencije ili divergencije. Dodavanjem ili oduzimanjem konacnog broja clanova beskonacnog reda, ne mijenjaju se njegova svojstva konvergencije ili divergencije.

Ispitivanje konvergencije beskonacnog reda vrsi se na vise nacina:

Usporedjivanjem: Ako poznati red $\sum v_n$ konvergira za $v_n \geq 0$ za sve $n > N,$ tada ako je $0 \leq u_n \leq v_n$, za sve $n > N, \sum n_n$ isto tako konvergira. (Clanovi su pozitivni)

Ako poznati red $\sum v_n$ divergira za $v_n \geq 0$ za sve $n > N,$ tada ako je $u_n \geq v_n$, za sve $n > N, \sum n_n$ isto tako divergira. (Clanovi su pozitivni)

Test kvocijenta: Ako je $u_n \geq 0$ i $v_n \geq 0$ i $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad A \neq 0$ ili $A = \infty$ tada i $\sum u_n$ i $\sum v_n$ konvergiraju ili divergiraju. Za $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = A = 0$ i ako $\sum v_n$ konvergira, tada $\sum u_n$ konvergira. Za $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = A = \infty$ i ako $\sum v_n$ divergira, tada $\sum u_n$ divergira.

Praktican primjer je kada se uzme $v_n = \frac{1}{n^p}$ pa nas limes ima oblik: $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} n^p u_n = A$

$\sum u_n$ konvergira ako je $p > 1$ i A je tada beskonacno.

$\sum u_n$ divergira ako je $p \leq 1$ i A konacno, $A \neq 0$.

Integral test: Ako je $f(x)$ pozitivna, neprekinuta i monotono padajuca za $x \geq N,$ $f(n) = u_n \; n = N, \; N+1, \; N+2$ tada $\sum u_n$ konvergira ili divergira ovisno da li $\int_N^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_N^M f(x)\,dx$ konvergira ili divergira.

Izmjenicni redovi: takav red konvergira ako vrijedi:

$|u_n + 1| \le |u_n|$ za n $\ge$ 1 i $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$

Test omjera: Red konvergira apsolutno ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$ <1 odnosno divergira za L>1

Za $L = 1$, test nije valjan

Test n - tog korjena: Red konvergira apsolutno ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$ <1 odnosno divergira za L>1

Za $L = 1$, test nije valjan

Raabe - ov test: Red konvergira apsolutno ako je $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = L$ >1 odnosno

za L<1 uvjetno divergira ili konvergira. Za $L = 1$, test nije valjan

Gauss - ov test: Ako je $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \dfrac{L}{n} + \dfrac{c_n}{n^2}$ gdje je $c_n < P$ za sve $n > N$ tada za:

L>1 red apsolutno konvergira i za $L \le 1$ red uvjetno divergira ili konvergira.
Ovaj se test koristi kada Raabe-ov test ne daje rjesenje.

Kada su clanovi reda funkcije, govorimo o redovima funkcija i prikazan je izrazom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)...$$

Red funkcija konvergira jednoliko ka $F(x)$, ili ima za granicu $F(x)$za sve x iz zatvorenog intervala $[a,b]$ ako apsolutna vrijednost ostatka $|u_n(x) - F(x)|$reda moze postati manja od unaprijed odredjenog broja ε, za sve x iz intervala, ako sa brojem clanova n idemo dovoljno daleko.

Ako je red funkcija $u_n(x), n = 1,2,3,...$neprekidan u $[a,b]$ i ako suma $\sum u_n(x)$ konvergira ka $S(x)$ u $[a,b]$, tada je i funkcija $S(x)$ neprekinuta u $[a,b]$.

Weierstrass - ov kriterij: Red neprekinutih funkija od x u intervalu $[a,b]$uniformno konvergira ako su clanovi tog reda manji od poznatog reda pozitivnih konstanti koji konvrgiraju:

$|u_n(x)| \le M_n \quad n = 1,2,3,... \quad i \sum M_n$konvergira

Za redove funkcija potencija vrijedi teorem: Red funkcija potencija je absolutno konvergentan

Za redovi funkcija potencija vrijede racunske radnje mnozenja i djeljenja uz uvjet da su neprekinute i da konvergiraju:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \Rightarrow \text{za } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ i zamjenom } x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n \text{ dobiju se koeficijenti}$$

b_n u funkciji od a_n.

Red funkcija potencija moze se razviti u Taylor-ov red i Maclaurin-ov red uz uvjet da su neprekinute, derivabilne u promatranom zatvorenom intervalu:

Taylor-ov red: $f(x) = f(x) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$

Maclaurin-ov red : $f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + ... \quad a = 0$

1. Dokazi da zadani red konvergira i nadji sumu reda: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ...$

   Red $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + .. = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ napisimo izraz na drukciji nacin:

   $$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

   $$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 2-1} - \frac{1}{2\cdot 2+1}\right) +$$

   $$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3-1} - \frac{1}{2\cdot 3+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

   $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$ Red konvergira i suma iznosi $S_n = \frac{1}{2}$

2. Ispitaj konvergenciju reda $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + .. = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   Sredimo izraz i napravimo n suma:

   $$S_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + .. = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) +$$

   $$+\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + ... = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

   Red konvergira i suma je 1.

3. Ispitaj konvergenciju reda $9 - 12 + 16 - \frac{64}{3} + \frac{256}{9} - ...$

Red je geometrijski sa koeficijentom $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow q = \frac{4}{3} > 1$

Geometrijski red divergira.

4. Dokazi da red divergira iako je $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ za $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ Postavimo sume:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \left(\sqrt{1+1} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{2+1} - \sqrt{2}\right) + ... + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

$S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ Red divergira iako je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

5. Ispitaj konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

Napisimo clanove reda: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{2!}{10^2} + \frac{3!}{10^3} + ... + \frac{n!}{10^n}$

Za test konvergencije koristimo test omjera:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L \Rightarrow u_n = \frac{n_n!}{10^n} \quad u_{n+1} = \frac{(n_n+1)!}{10^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n_n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n_n!}{10^n}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{10^n(n_n+1)!}{n_n!10^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\frac{(n_n+1)!}{n_n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}(n+1) = \infty$$

$L = \infty > 1 \Rightarrow$ Red divergira

6. Ispitaj konvergentnost reda : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$

Vidljivo je, da se radi o geometrijskom redu sa $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}.$

Prvi clan ima vrijednost 1. Red konvergira jer je $|q| = \frac{1}{2} < 1$. Suma reda je

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

7. Ispitaj konvergentnost reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$

Za velike n, razlomak poprima oblik $\frac{4n^2}{n^3} = \frac{4}{n}$ Prakticno za velike n, promatramo samo naj vecu potenciju u brojniku i nazivniku. $u_n = \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$ $v_n = \frac{4}{n}$

Test kvocijenta izgleda ovako:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}}{\frac{4}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{4n^3 - n^2 + 3n}{4n^3 + 8n} \Big/ n^3 = \lim_{n \to +\infty} \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{4 + \frac{8}{n^2}} = 1$$

Prema testu kvocijenta, imamo $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = A = 1 \neq 0$ i bzirom da

$\sum v_n = 4 \sum \frac{1}{n}$ divergira, red divergira.

8. Ispitaj konvergentnost reda: $\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{29} + ... + \frac{1}{n^3 + 2}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{29} + ... + \frac{1}{n^3 + 2}$ Uvedimo usporedbu $\frac{1}{n^3 + 2} < \frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^3}$ znamo da konvergira jer je to red potencija sa $n = 3 > 1$ i po testu usporedjivanja, $\sum \frac{1}{n^3 + 2}$ konvergira takodjer.

9. Ispitaj Integralnim testom konvergenciju reda $\sum \frac{\ln n}{n}$

Izvrsimo zamjenu $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ i prema ranijem objasnjenju, izracunajmo $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{u \to \infty} \int_1^{u} \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow$ Rjesenje integrala se moze naci u dijelu neodredjeni integrali

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{u \to \infty} \int_1^{u} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{u \to \infty} \left| \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right|_1^u = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{2} \left| (\ln u)^2 - 0 \right| = \infty$$

Integral divergira, pa tako i nas red.

10. Ispitaj testom omjera, konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{n}^4 e^{-n^2}$. Vidimo da je $u_{n+1} = (n+1)^4 \, e^{-(n+1)^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4\ e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4\ e^{-(n^2+2n+1)}}{n^4 e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\frac{e^{-(n^2+2n+1)}}{e^{-n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 e^{-2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\lim_{n\to\infty} e^{-2n-1} = 1\cdot 0 = 0$$

Posto je $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1$, red konvergira

11. Testom usporedjivanja, ispitaj konvergenciju reda $1+\frac{2^2+1}{2^3+1}+\frac{3^2+1}{3^3+1}+\frac{4^2+1}{4^3+1}+...$

$u_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} \Rightarrow$ Red cemo usporediti sa redom $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ Postavimo limes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+1}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1)}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^3+1} = 1 \Rightarrow \text{Red kojim usporedjujemo je}$$

harmonijski red $\sum\frac{1}{n}$, koji divergira. Ispitani red $\frac{n^2+1}{n^3+1}$ znaci isto tako divergira.

12. Usporedbenim testom ispitaj konvergentnost reda $2-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}-\frac{2^7}{7!}...$

$$u_n = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \Rightarrow \text{Omjer } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}}{(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}(2n-1)!}{2^{2n-1}(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{(2n+1)n}0 \Rightarrow \text{Red je apsolutno konvergentan.}$$

13. Ispitaj konvergentnost reda $1+2a+a^2+2a^3+a^4+2a^5 ...$za $a=\frac{5}{3}$ i $a=-\frac{2}{3}$.

Testom n-tog korjena imamo: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = L$

$$\sqrt[n]{u_n}\left\{\begin{array}{ll}\sqrt[n]{2|a^n|} = \sqrt[n]{2}\,|a| & \text{ako je } a \text{ neparan}\\ \sqrt[n]{|a^n|} = |a| & \text{ako je } a \text{ paran}\end{array}\right\}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = |a| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\,|a| = |a|$$

Za $|a|<1$ red konvergira a za $|a|>1$ red divergira.

Za $a=\frac{5}{3}$ red divergira i za $a=-\frac{2}{3}$, red konvergira.

14. Za koje vrijednosti od x, zadani red konvergira? $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

Postavimo sume: $u_n=\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$ i $u_{n+1}=\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}\left[3(n+1)-1\right]}=\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(3n+2)}$

Primjenimo testa omjera: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(3n+2)}}{\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}}\right|$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}2^n(3n-1)}{2^{n+1}(3n+2)n(x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{2\cdot(x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^n(x-1)}{2\cdot(x-1)^n}\right|$$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)}{2}\right|=\frac{|x-1|}{2}\Rightarrow$ Red konvergira za $|x-1|<2\Rightarrow \underline{x-1=\pm 2}$

Za $x=3$: red izgleda ovako: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3-1)^n}{2^n(3n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n-1)}\Rightarrow$ Red divergira jer $n-$ ti

clan ne postaje nula

Za $x=-1$: red izgleda ovako: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1-1)^n}{2^n(3n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(3n-1)}\Rightarrow$ Red divergira jer $n-$ ti

clan ne postaje nula

Zadani red konvergira samo za $|x-1|<2\Rightarrow -2<(x-1)<2$ odnosno $\quad -1<x<3$