4. ANALIZA TOKA FUNKCIJE, EKSTREMI

4.1 Opci pojmovi

Nultocke funkcije - su tocke u kojima je funkcija jednak nula. Za razlomljenu racionalnu funkciju, je kada je brojnik nula.
Polovi funkcije - su tocke u kojima je nazivnik razlomljene funkcije jednak nula. U tim tockama funkcija ima vertikalne pravce, okomite na os x i dodiruju krivuju funkcije u beskonacnosti.
Asimptota - je prvac koji se u beskonacnosti priblizava krivulji a moze biti vertikalna (pol funkcije), horizontalna ili kosa.
Horizontalna asimptota je pravac koji ima jednadzbu $y = a$: za $y = f(x) \quad a = \lim\limits_{y\to\infty} x$.
Vertikalna asimptota je pravac koji ima jednadzbu $x = b$: za funkciju $y = f(x)$ odnosno u inverznom obliku za $x = g(y) \quad x = b \quad b = \lim\limits_{y\to\infty} x = \lim\limits_{y\to\infty} g(y)$

Kosa asimptota je pravac koji ima jednadzbu $y = kx + l$: za $y = f(x)$: $k = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{x}$

$l = \lim\limits_{y\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$

Tocka infleksije - je tocka u kojoj funkcija mijenja zakrivljenost iz konkavnosti u konveksnost (ili obratno)
Kriticni broj - je broj x_0, koji pripada domeni funkcije i za koji je $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ je nedefinirana. Uz predpostavku da $f'(x_0)$ postoji, i da postoji i $f''(x_0)$ tada:

Ako je $f''(x_0) = 0$ Nije definirano sto se zbiva sa funkcijom u tocki x_0.

Ako je $f''(x_0) < 0$ Funkcija ima relativni maximum u tocki x_0.

Ako je $f''(x_0) > 0$ Funkcija ima relativni minimum u tocki x_0.

Funkcija ima apsolutni maximum u tocki x_0 ako za sve vrijednosti od x u intervalu I vrijedi:

$$f(x) \le f'(x_0).$$

Funkcija ima apsolutni minimum u tocki x_0 ako za sve vrijednosti od x u intervalu I vrijedi:

$$f(x) \ge f'(x_0).$$

Ako funkcija ima $y''_{x_0} = 0$, potrebno je definirati sto se desava u tocki x_0:

izracunamo y''': ako je $y''' \ne 0$ funkcija ima tocku infleksije u x_0

ako je $y''' = 0$ racunamo $y^{(IV)}$ derivaciju i uvrstimo x_0.

izracunamo $y^{(IV)}_{x_0}$: ako je $y^{(IV)} \ne 0$ funkcija ima u toj tocki ekstrem.

za $y^{(IV)}_{x_0} < 0,$ maksimum, za $y^{(IV)}_{x_0} > 0,$ minimum.

ako je $y^{(IV)} = 0$ moramo nastaviti derivirati i naci $y^{(V)}$.

U tocki x_0 za koju su derivcije neparnog reda $y^{(III)}, y^{(V)}, y^{(VII)}$ razlicite od nule, funkcoija ima tocku infleksije.
Tok funkcije i njene derivacije:
Ako funkcija ima pozitivnu prvu derivaciju u x_0, funkcija prolazi tom tockom rastuci.
Ako funkcija ima negativnu prvu derivaciju u x_0, funkcija prolazi tom padajuci.
Ako funkcija ima prvu derivaciju u x_0, u toj tocki je tangenta paralelna sa osi x.
U toj tocki funkcija ima ili ekstrem ili tocku infleksije.
Ako je funkcija u nekom intervalu konveksna (oblik gljive), njena druga derivacija u x_0 je negativna.
Ako je funkcija u nekom intervalu konkavna (oblik slova U), njena druga derivacija u x_0 je pozitivna.
Funkcija ima u x_0 tocku infleksije, ako je u toj tocki druga derivacija nula.

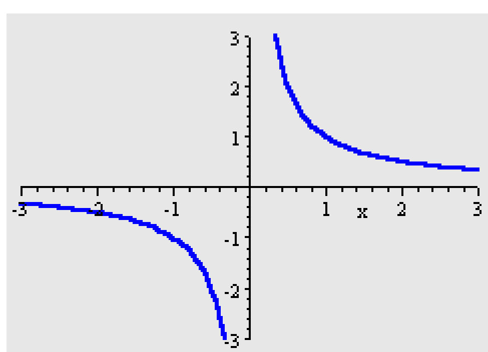
4.2 Asimptote i polovi funkcije

1. Odredi asimptote zadane funkcije: $y = \dfrac{1}{x}$.

   Jednadzba horizontalne asimptote, paralelne sa osi $x: y = a \Rightarrow y = a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

   $a = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ asimptota je $x -$ os
   Jednadzba vertikalne asimptote, paralelne sa osi $y: x = b \Rightarrow x = b = \lim\limits_{y\to\infty} x$ izrazimo funkciju po x: $\Rightarrow y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y} \Rightarrow \lim\limits_{y\to\infty} x = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{y} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow x = 0$

   asimptota je $y -$ os



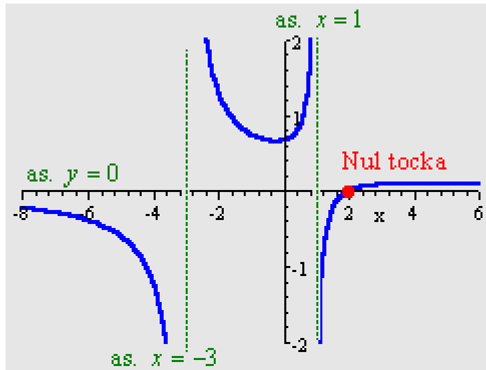
2. Odredi asimptote zadane razlomljene racionalne funkcije: $y = \dfrac{x-2}{(x-1)(x+3)}$.

   Funkcija ima polove-vertikalne asimptote, u tockama za koje je nazivnik nula: $(x-1) = 0$
   $x = 1 \quad (x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ Funkcija ima nultocke za $f(x) = 0$, kada je brojnik nula:

$x-2=0 \Rightarrow x=2.$

Funkcija ima horizntalne asimptote, u tockama za koje vrijedi:

$$y=a=\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2x+2}=0 \Rightarrow \text{horizontalna asimptota je } x-\text{os}$$



3. Odredi asimptote razlomljene racionalne funkcije: $y=\dfrac{x+4}{x-3}.$

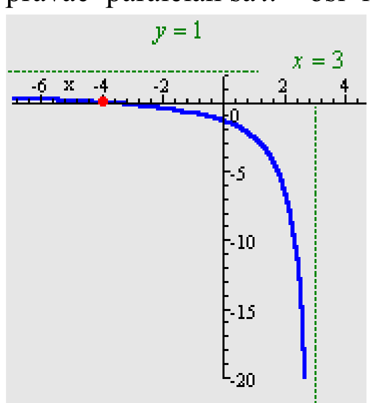
Funkcija ima polove-vertikalne asimptote, u tockama za koje je nazivnik nula: $(x-3)=0$

$x=3$. Funkcija ima nultocke za $f(x)=0,$ kada je brojnik nula: $x+4=0 \Rightarrow x=-4.$

Funkcija ima horizontalne asimptote, u tockama za koje vrijedi:

$$y=a=\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}}=1$$

Horizontalna asimptota je pravac paralelan sa $x-$osi na $y=1$.



4. Izracunaj jednadzbe kosih asimptota za funkciju: $2x^2+3x+2xy-2=0$

Koristeci gornja tumacenja imamo:

$F(x)=2x^2+3x+2xy-2=0 \Rightarrow f(x) \Rightarrow 2x^2+3x+2xy-2=0 \;\; /: x^2$

$$2\frac{x^2}{x^2}+3\frac{x}{x^2}+2\frac{xy}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{0}{x^2}\Rightarrow 2+\frac{3}{x}+\frac{2y}{x}-\frac{2}{x^2}=0 \quad \text{odnosno:}$$

$$f(x)=y=-x-\frac{3}{2}+\frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x}-1$$

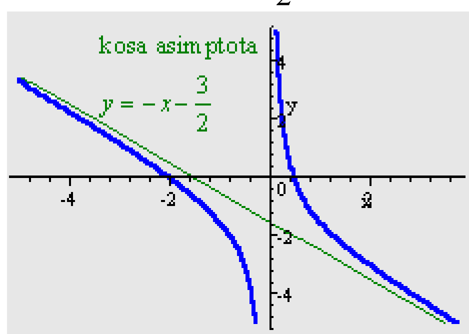
Jednadzba kose asimptote je jednadzba pravca: $y=kx+l$

Koeficijent smjera: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x}-1\right)=-1\Rightarrow k=-1$

Odsjecak na osi $y: l=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\left[\left(-x-\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\right)-(-1)x\right]$

$$l=\lim_{x\to\infty}\left(-x-\frac{3}{2}+\frac{1}{x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\right)=-\frac{3}{2}$$

Trazena asimptota ima jednadzbu: $y=-x-\frac{3}{2}$



5. Izracunaj kose asimptote funkcije $x^2y+xy^2-2=0$

U funkciji se zamijeni y sa $y=kx+l$ i prva dva clana, sa najvisom potencijom se izjednace sa nulom: $y=kx+l\Rightarrow x^2(kx+l)+x(kx+l)^2-2=0$

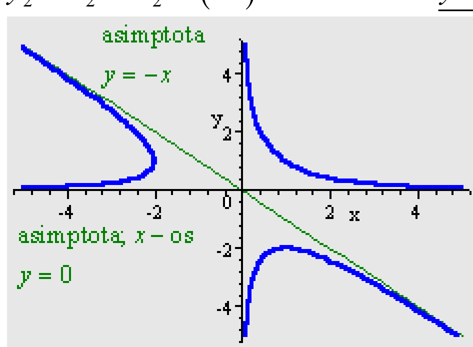
$x^3k+x^2l+x^3k^2+2x^2kl+xl^2-2=0\Rightarrow x^3\left(k^2+k\right)+x^2\left(2kl+l\right)+xl^2-2=0$

$\left(k^2+k\right)=0\Rightarrow k(k+1)=0\Rightarrow k_1=0\,k_2=-1\Rightarrow 2k_2l+l=0$

$\left(2kl+l\right)=0\Rightarrow 2k_1l+l=0\Rightarrow l_1=0\Rightarrow 2(-1)l+l=0\Rightarrow l_2=0$

Trazene jednadzbe jesu: $y=kx+l\Rightarrow y_1=k_1x+l_1=0x+0=0 \quad \underline{y=0}$

$$y_2=k_2x+l_2=(-1)x+0=-x\Rightarrow \underline{y=-x}$$



4.3 Ekstremi i graficki prikaz toka funkcije

U nastavku je dan postupak za graficko prikazivanje toka funkcije:

Izracunaj y' i ako treba i y''.

Koristi y' za ispitivanje kriticnih brojeva, kada je $y' = 0$ ili nedefiniran. Ispitaj moguce relativne ekstreme.

Koristi y' za ispitivanje intervala u kojem funkcija raste $y' > 0$ ili pada $y' < 0$.

Koristi y'' za ispitivanje da li je funkcija konkavna $y' > 0$ ili konveksna $y' < 0$.

Ispitaj za tocke infleksije, kada je $y'' = 0$.

Izracunaj vertikalne asimptote. Za razlomljenu funkciju, to je, kada je nazivnik nula.

Izracunaj horizontalne asimptote. Za $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0$, y_0 je asimptota. Ispitaj limes za $\pm\infty$.

Ispitaj ponasanje funkcije u beskonacnosti: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Izracunaj nul tocke i polove funkcije $y = 0$, presjecista sa $y -$ osi, $x = 0$.

Ispitaj ponasanje funkcije ako se priblizava nekoj tocki sad s lijeva sad s desna, primjer je $y = |x|$.

Ispitaj ponasanje prve derivacije, njeno priblizavanje ka $+\infty$ ili $-\infty$, sa obje strane, primjer $y = \sqrt{|x|}$.

Ispitaj i izracunaj kose asimptote $y = kx + l$ tako da je $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx + l)\right] = 0$.

Limes je za $\pm\infty$.

6. Ispitaj tok funkcije $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$

Izracunajmo derivacije: $y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12;\quad y'' = 36x^2 - 60x - 24$

Izjednacimo $y'' = 0$ i ispitajmo za moguce tocke infleksije: $y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 0$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -\dfrac{1}{3}$

Za $x < -\dfrac{1}{3}$ $\quad y''_{\left(-\frac{1}{3}\right)} = 36\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 - 60\left(-\dfrac{1}{3}\right) - 24 = 0$ smatramo pozitivnim krivulja je konkavna, gleda za gore, (oblik slova U)

Za $-\dfrac{1}{3} < x < 2$ $\quad y''_{(0)} = 36(0)^2 - 60(0) - 24 = -24$, negativna, krivulja je konveksna, gleda za dolje, (oblik gljive).

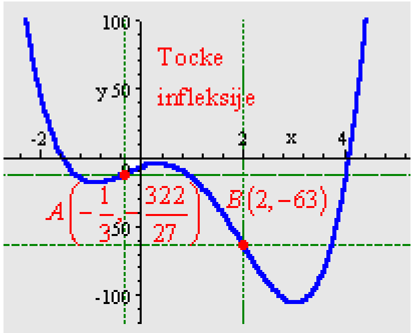
Za $x > 2$ $\quad y''_{(3)} = 36(3)^2 - 60(3) - 24 = 120$, pozitivna, krivulja je konkavna, gleda za gore, (oblik slova U).

Tocke infleksije su za $y^{"}=0$. Uvrstimo te vrijednosti u funkciju:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=3\left(-\frac{1}{3}\right)^{4}-10\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}-12\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}+12\left(-\frac{1}{3}\right)-7\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{322}{27}$$

Prva tocka infleksije: $A(-\frac{1}{3},-\frac{322}{27})\Rightarrow f(2)=3(2)^{4}-10(2)^{3}-12(2)^{2}+12(2)-7=-63$

Druga tocka infleksije: $B(2,-63)$



2. Ispitaj funkciju $y=\frac{x^{3}}{3}-x^{2}-3x+5$

Izracunajmo derivacije: $y^{'}=x^{2}-2x-3\Rightarrow y^{"}=2x-2$

Izjednacimo $y^{'}=0$: $x^{2}-2x-3=0\Rightarrow x_{1}=-1\quad x_{2}=3$

Funkcija ima ekstreme u $x_{1}=-1; x_{2}=3$.

Izracunajmo $y^{"}_{x_1}$: $y^{"}_{x_1}=2x_{1}-2=2(-1)-2=-4<0$ maksimum

$y^{"}_{x_2}=2x_{2}-2=2(3)-2=4>0$ minimum

Izracunajmo koordinate ekstrema: uvrstimo vrijednosti za x u funkciju:

$$f(-1)=\frac{(-1)^{3}}{3}-(-1)^{2}-3(-1)+5=6.67\quad \max(-1,6.67)$$

$$f(3)=\frac{(3)^{3}}{3}-(3)^{2}-3(3)+5=-4\quad \min(3,-4)$$

Za $-\infty<x<-1$ Funkcija raste do maksimuma. Krivulja prve derivacije $y^{'}$ je pozitivna, parabola.

Za $x=-1$ Funkcija ima maksimum. $y^{'}=0$ $y^{"}<0$.

Za $x=1$ Funkcija pada do tocke infleksije, kada mijenja smjer iz konveksnog u konkavni oblik.

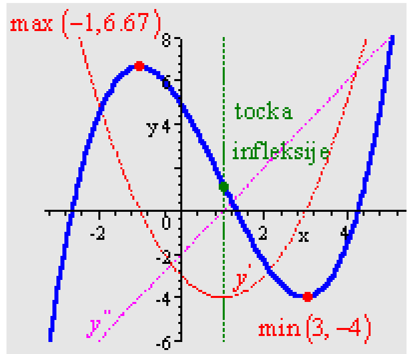
Za $x=3$ Funkcija ima minimum, $y^{'}=0, y^{"}>0$.

Za $3<x<+\infty$ Funkcija raste $y^{'}>0$.

Izracunajmo tocku infleksije i njene koordinate: $y^{"}=2x-2=0\Rightarrow x_{0}=1$

Za $y^{'''}=(2x-2)^{'}=2\neq 0$ U toj tocki je tocka infleksije: neparna derivacija je razlicita od nule. Uvrstimo x_0 u funkciju i dobiti cemo koordinatu y_0, tocke infleksije:

$$y_0 = \frac{(1)^3}{3} - (1)^2 - 3(1) + 5 = \frac{1}{3} + 1 = 1.33$$



8. Analiziraj funkciju $y = \dfrac{x^2}{x-2}$

Izracunajmo derivacije: $y' = \dfrac{(x-2)2x - x^2(1)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$

$$y'' = \left(\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(x-2)^2(2x-4) - (x^2-4x)2(x-2)(1)}{\left[(x-2)^2\right]^2} =$$

$$y'' = \frac{(x-2)\left[(x-2)(2x+4) - 2x(x-4)\right]}{(x-2)^4} = \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Izracunajmo ekstreme: $y' = 0 \Rightarrow$ kada je brojnik jednak nula: $x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0 \Rightarrow \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

Ispitajmo y_x'': Za $y_0'' = \dfrac{8}{(0-2)^3} = -1 < 0$ relativni maksimum u $x_1 = 0$

Za $y_4'' = \dfrac{8}{(4-2)^3} = 1 > 0$ relativni minimum u $x_2 = 4$

Tocke ekstrema: $f(0) = \dfrac{0^2}{0-2} = 0;\ A(0,0) \quad f(4) = \dfrac{4^2}{4-2} = 8;\ B(4,8)$

Funkcija nema tocke infleksije, jer je uvijek $y'' \neq 0$.

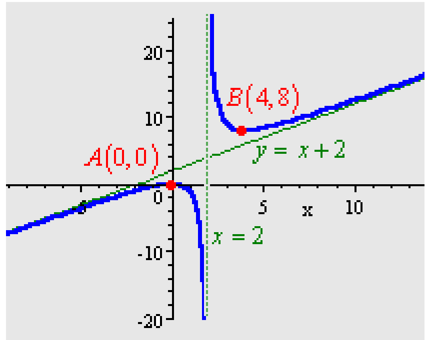
Ispitajmo asimptote:

Verikalna asimptota ili pol funkcije: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Kosa asimptota: $y = kx + l \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{x-2} \Rightarrow kx + l = \dfrac{x^2}{x-2}$

$kx^2 - 2kx + xl - 2l - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(k-1) + x(l-2k) - 2l = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$

$l - 2k = 0 \Rightarrow l = 2k = 2 \Rightarrow$ Jednadzba kose asimptote: $\qquad y = x + 2$



9. Analiziraj funkciju $y = e^{\sin x}$

Izracunajmo derivacije: $y' = e^{\sin x}\cos x$

$y'' = e^{\sin x}(-\sin x) + \cos x e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$

Izracunajmo ekstreme: $y' = 0 \Rightarrow e^{\sin x}\cos x = 0$

$e^{\sin x} \neq 0 \Rightarrow e^{\sin x}$ je uvijek pozitivna, nema nul tocke.

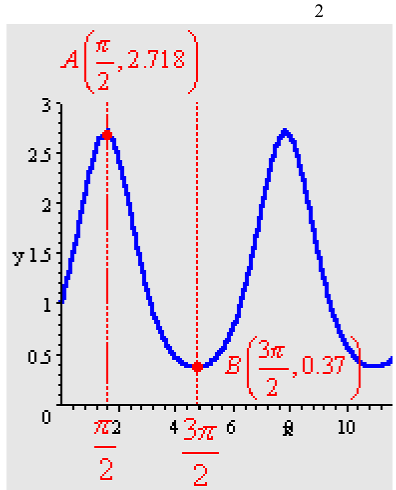
$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ tocke ekstrema funkcije

Uvrstimo to u drugu derivaciju:

$y_{x_0}'' = e^{\sin\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = e^1(0-1) = -e \quad y'' < 0 \quad za\ x = \frac{\pi}{2}$, maksimum

$y_{x_0}'' = e^{\sin\frac{3\pi}{2}}\left(\cos^2\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-1}(0+1) = \frac{1}{e} \quad y'' > 0 \quad za\ x = \frac{3\pi}{2}$, minimum

Koordinate ekstrema: $y_{\frac{\pi}{2}} = e^{\sin\frac{\pi}{2}} = e^1 = 2.7181..\ y_{\frac{3\pi}{2}} = e^{\sin\frac{3\pi}{2}} = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0.37.$



10. Analiziraj funkciju $y = \frac{x^2}{(x-2)(x-6)}$

Polovi funkcije su za: $(x-2) = 0; (x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 6$

Izracunajmo derivacije:

$$y' = \frac{2x(x-2)(x-6) - x^2(2x-8)}{(x-2)^2(x-6)^2} = \frac{2x^3 + 12x^2 - 4x^2 + 24 - 2x^3 + 8x^2}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y' = \frac{24x - 8x^2}{(x-2)^2(x-6)^2}$$

$$y'' = \left[\frac{24x - 8x^2}{(x-2)^2(x-6)^2}\right]' =$$

$$y'' = \frac{(24-16x)(x-2)^2(x-6)^2 - \left[(24x-8x^2)2(x-2)(x-6)2x-8\right]}{(x-2)^4(x-6)^4}$$

$$y'' = \frac{16x^3 - 72x^2 + 288}{(x-2)^3(x-6)^3}$$

Izracunajmo ekstreme: $y' = 0 \Rightarrow \dfrac{24x - 8x^2}{(x-2)^2(x-6)^2} = 0 \Rightarrow 24x - 8x^2 = 8x(3-x) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \Rightarrow y_x = \dfrac{3^2}{(3-2)(3-6)} = -3$ ekstrem je u tocki $A(0,0)$, $B(3,-3)$

Ispitajmo vrijednost druge derivacije:

$y_{(0)}'' = \dfrac{16 \cdot 0^3 - 72 \cdot 0^2 + 288}{(0-2)^3(0-6)^3} = \dfrac{1}{6} \quad y'' > 0 \quad$ *za* $x = 0$ imamo minimum

$y_{(3)}'' = \dfrac{16 \cdot 3^3 - 72 \cdot 3^2 + 288}{(3-2)^3(3-6)^3} = -\dfrac{8}{3} \quad y'' < 0 \quad$ *za* $x = 3$ imamo maksimum

Pogledajmo za tocke infleksije: $\quad y'' = \dfrac{16x^3 - 72x^2 + 288}{(x-2)^3(x-6)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 9x^2 + 36 = 0$

Realno rjesenje kubne jednadzbe je $y'' = 0$ za $x = -1.7037$.

Funkcija ima tada vrijedost $f(-1.7037) = 0.10171$.

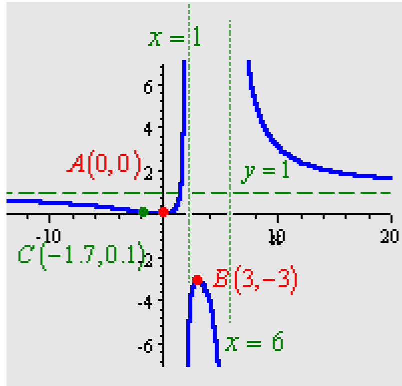
To su ujedno koordinate tocke infleksije

Pogledajmo za horizontalne asimptote:

$$y = a = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - 8x + 12} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{12}{x^2}} = 1$$

Jednadzba horizontalne asimptote: $y = 1$

Prikaz funkcije je na donjoj slici u nastavku



11. Izracunaj ekstreme funkcije $y = 3x^5 - 2$

Izracunajmo derivacije: $y' = 15x^4 \quad y'' = 60x^3$

Ekstrem je za: $y' = 0 \Rightarrow 15x^4 = 0 \Rightarrow x_{1,2,3,4} = 0$ Vrsta ekstrema: $y'' = 0 \Rightarrow 60x^3 = 0$

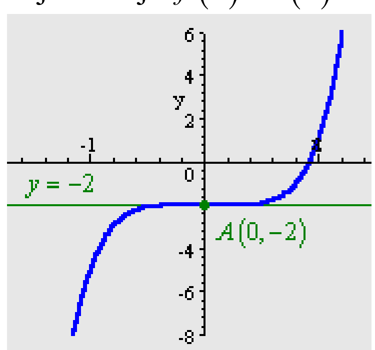
$x_{1,2,3} = 0 \Rightarrow$ Funkcija ima ekstrem samo za $x = 0$. Ispitajmo sa trecom derivacijom:

$y''' = 180x^2 \quad y_x''' = 180 \cdot 0^2 = 0$ nastavimo: $y^{(IV)} = 360x \quad y_x^{(IV)} = 360 \cdot 0^2 = 0$

nastavimo: $y^{(V)} = 360 \quad y_x^{(V)} = 360 \Rightarrow y_x^{(V)} \neq 0$ imamo ekstrem:

Derivacija koja je razlicita od nule, je neparna i funkcija ima tocku infleksije

za $x = 0$. Funkcijska vrijednost je: $f(0) = 3(0)^5 = -2 \quad A(0,-2)$



12. Izracunaj koja je naj veca duzina grede, koja se moze prenijeti kroz uski hodnik, uz uvjet, da je kretanje grede paralelno sa podom (vidi sliku) .

Trazena duzina je minimum funkcije kojoj je izrazena duzina: $\sec\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{a}$

$\overline{BC} = a\sec\alpha \Rightarrow \csc\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{b} \Rightarrow \overline{AB} = b\csc\alpha$

$D = \overline{BC} + \overline{AB} = a \cdot \sec\alpha + b\csc\alpha \Rightarrow$ odredimo minimum funkcije $\dfrac{dD}{d\alpha}$

$\dfrac{dD}{d\alpha} = \left(a \cdot \sec\alpha + b\csc\alpha\right)' = 0 \Rightarrow a\sec\alpha\tan\alpha - b\csc\alpha\cot\alpha =$

$$\frac{dD}{d\alpha}=a\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-b\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=a\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-b\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\Rightarrow a\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=b\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\frac{dD}{d\alpha}\Rightarrow a\sin^3\alpha=b\cos^3\alpha \qquad \tan^3\alpha=\frac{b}{a}\Rightarrow \underline{\tan\alpha=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \qquad \underline{\alpha=\tan^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)}$$

Minimum funkcije dobijemo iz druge derivacije $y''>0$:

$$y''=\frac{d^2D}{d\alpha^2}=\left(a\sin^3\alpha-b\cos^3\alpha=0\right)'=3a\sin^2\alpha\cos\alpha+3c\cos^2\alpha\sin\alpha$$

$$y''=0\Rightarrow 3a\sin^2\alpha\cos\alpha+3b\cos^2\alpha\sin\alpha=0$$

$$3a\sin^2\alpha\cos\alpha=-3b\cos^2\alpha\sin\alpha\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{b}{a}$$

$y_\alpha''>0$ jer su vrijednosto za b i a konacne i realne (dimenzije hodnika) i nas minimum je dokazan.

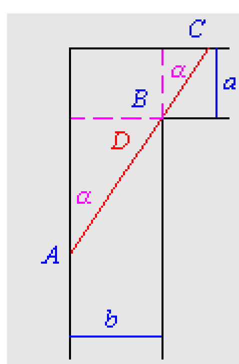
Izracinajmo duzinu grede: $D=a\cdot\sec\alpha+b\csc\alpha$

$$\csc\alpha=\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}=\frac{\left[1+\left(\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left[\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}=\ldots=\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{b^{\frac{1}{3}}}$$

$$\sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\left[1+\left(\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}\ldots=\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

$$D=a\cdot\sec\alpha+b\csc\alpha=a\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}+b\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[ab^{\frac{1}{3}}+ba^{\frac{1}{3}}\right]}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$$

$$D=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$



13. Izracunaj dimenzije drvene grede pravokutnog presjeka, koja se moze isjeci iz balvana promjera 16 cm tako, da njena cvrstoca bude najveca.

Cvrstoca grede C jednaka je produktu sirine s i kvadrata visine $v \Rightarrow \ C = ksv^2$

dijagonala grede jednaka je promjeru balvana: $d = 16 = \sqrt{s^2 + v^2}$

$d^2 = 16^2 = 256 = s^2 + v^2 \Rightarrow v^2 = 256 - s^2$

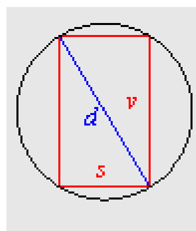
$C = ksv^2 = C = ks\left(256 - s^2\right) = k\left(256s - s^3\right) \Rightarrow f\left(x\right) \equiv C\left(s\right) = k\left(256s - s^3\right)$

Izracunajmo derivaciju: $y' = \dfrac{dC}{ds} = \left[k\left(256s - s^3\right)\right]' = k\left(256 - 3s^2\right)$

$\dfrac{dC}{ds} = k\left(256 - 3s^2\right) = 0 \Rightarrow 3s^2 = 256$ za $k = 1 : s = \sqrt{\dfrac{256}{3}} = 9.24cm$

$d^2 = 16^2 = 256 = s^2 + v^2 \Rightarrow v = \sqrt{256 - 9.24} = 13.1cm$

Trazena greda ima dimenzije $9.24cm \times 13.1cm$



14. Potrebno je napraviti reklamu povrsine 18 m^2. Rubovi na vrhu i dnu trebaju biti siroki 0.75 m a rubovi sa lijeva i desna, 0.5 m. Izracunaj dimenzije plakata tako, da povrsina korisnog dijela (unutar okvira) bude maksimalna.

Oznacimo jednu dimenziju sa x mjerenu u m. Druga dimenzija je $\dfrac{18}{x}$.

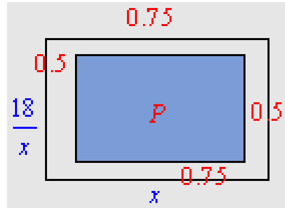
Korisna povrsina iznosi: $P = \left(x - 1\right)\left(\dfrac{18}{x} - \dfrac{3}{2}\right)$

Derivacija $\dfrac{dP}{dx} = \left[\left(x - 1\right)\left(\dfrac{18}{x} - \dfrac{3}{2}\right)\right]' = x\left(\dfrac{18}{x} - \dfrac{3}{2}\right) + \left(x - 1\right)\left(-\dfrac{18}{x^2}\right)$

$\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{18}{x^2} - \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 = 36 \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \Rightarrow y'' = \dfrac{d^2P}{dx^2} = \left(\dfrac{18}{x^2} - \dfrac{3}{2}\right)' = -\dfrac{36}{x^3}$

$y''_{(x)} = -\dfrac{36}{\left(2\sqrt{3}\right)^3} = -0.866 < 0$ funkcija ima maksimum za $x = 2\sqrt{3}$.

Korisna povrsina ima dimenzije: $2\sqrt{3} \times \dfrac{18}{2\sqrt{3}} = \underline{2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}$



15. U kompaniji je utvrdjeno, da mogu prodati 1000 komada svojih proizvoda na mjesec ako bi cijena bila 5 kn po komadu. Isto tako, ako smanje cijenu za 0.01 kn, za tih 1000 komada, prodati ce 10 komada vise. Izracunaj uz te uvjete, najveci dohodak i jedinicnu cijenu proizvoda koji stvara taj dohodak.

Broj proizvoda preko 1000 oznacimo sa x. Ukupno je prodano $1000 + x$ komada.
Cijena proizvoda za broj prodanih komada preko 1000, tj. 10, sa snizenom cijenom od 0.01 kn izrazimo kao: $JC \equiv 5 - 0.01\left(\frac{x}{10}\right) = 5 - 0.001x$

Dohodak D, dobijemo mnozenjem broja prodanih proizvoda i jedinicne cijene:
$D = (1000 + x)(5 - 0.001x) = 5000 + 4x - 0.001x^2$ sada racunamo ekstrem:
$\frac{dD}{dx} = 4 - 0.002x \Rightarrow \underline{4 - 0.002x = 0} \Rightarrow x = 2000$ izjednacili smo $y' = 0$
Za $x < 2000 \Rightarrow y' > 0$ Za $x > 2000 \Rightarrow y' < 0$
Za $x = 2000$ imamo maksimum funkcije. To znaci, da najveci dohodak ce se ostvariti ako se proda 2000 komada proizvoda preko 1000, tj. 3000 komada.
$D_{(2000)} = 5000 + 4(2000) - 0.001(2000)^2 = 9000kn$ ukupni dohodak
$JC_{(2000)} \equiv 5 - 0.001(2000) = 5 - 2 = 3kn$ jedinicna cijena proizvoda

16. Brod A, plovi brzinom 10 cvorova (milja/sat) na istok i u 9:00 sati udaljen je od broda B, 65 milja. Brod B, plovi na jug, brzinom 15 cvorova. Izracunaj njihovu najkracu medjusobnu udaljenost vrijeme, (sati) kada ce se to desiti.

Oznacimo pocetne polozaje brodova sa A_0 i B_0, u 9:00 sati.
Nakon t sati, brod B, proci ce $15t$ milja a brod A, $(65 - 10t)$ milja.
Razraljina izmedju brodova iznosi: $R^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2$
Derivacija: $D_t\left[R(t)\right] = \cancel{2}R\frac{dR}{dt} = \cancel{2}\cdot 15t \cdot 15 + \cancel{2}(-10)(65 - 10t)$

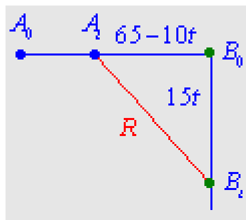
$$\frac{dR}{dt} = \frac{225t - 650 + 100t}{R} = \frac{325t - 650}{\left[(15t)^2 + (65 - 10t)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$ izjednacimo sa nulom:

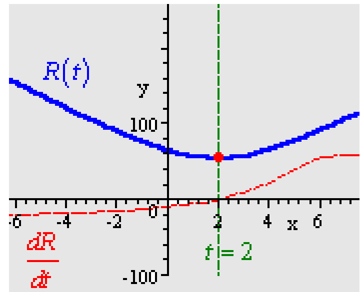
$$\frac{dR}{dt}=0\Rightarrow\frac{325t-650}{\left[(15t)^2+(65-10t)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=0\Rightarrow t=2\ \text{ minimum funkcije}$$

$$D^2_{(t=2)}=(15\cdot 2)^2+(65-10\cdot 2)^2=900+2025=2925$$

$$D=\sqrt{2925}=\sqrt{225\cdot 13}=15\sqrt{13}\ \text{milja}$$

$t=2\Rightarrow$ trazeno vrijeme je 2 sata nakon 9:00 sati, tj. u 11:00 sati.





17. Jakost svjetlosti je obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti promatrane tocke od izvora svjetlosti. Promatrajmo dva izvora javne rasvjete udaljenih 100m, i sa ugradjenim izvorima svjetlosti od 8 odnosno 1 jedinice jakosti svjetlosti. Izracunaj na kojoj udaljenosti je tocka, sa naj manjom osvjetljenoscu. Osvjetljenost svake tocke jednak je zbroju osvjetljenosti koja daju oba izvora.

Oznacimo jakost svjetlosti sa I a sa x, udaljenost od izvora sa armaturom od 8 svjetlosnih jedinica. Postavimo jednadzbu: $I=\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{1}{(100-x)^2}\Rightarrow$ Trazimo minimum funkcije $I(x)$.

$$\frac{dI}{dx}=\left[\frac{8}{x^2}+\frac{1}{(100-x)^2}\right]'=\frac{-16}{x^3}+\frac{-2(100-x)(-1)}{(100-x)^4}=\frac{-16}{x^3}+\frac{2}{(100-x)^3}$$

$$\frac{dI}{dx}=\frac{-16(100-x)^3+2x^3}{x^3(100-x)^3}\Rightarrow \text{izjednacimo sa nulom: }\frac{dI}{dx}=0$$

$$\frac{-16(100-x)^3+2x^3}{x^3(100-x)^3}=0\Rightarrow -16(100-x)^3+2x^3=0\quad\text{odnosno:}$$

$$2x^3-16(100-x)^3=0\Rightarrow \underline{x^3=8(100-x)^3}\ \text{ili:}\qquad x=2(100-x)\Rightarrow 3x=200$$

$\underline{x=66.6\dot{6}m}$ Tocka sa naj manjom osvjetljeno

17. Izracunaj visinu stosca, koji ima maksimalni volumen a upisan je u kugli radijusa 8cm.

Oznacimo radijus stosca sa r a visinu sa h. Iz slike izvodimo:

$$r^2+(h-8)^2=8^2\Rightarrow r^2+h^2-16h+64=64\Rightarrow\qquad \underline{r^2=16h-h^2}$$

Volumen stosca : $V = \dfrac{r^2\pi h}{3} = \dfrac{\left(16h-h^2\right)\pi h}{3} = \dfrac{\left(16h^2-h^3\right)\pi}{3}$ derivirajmo:

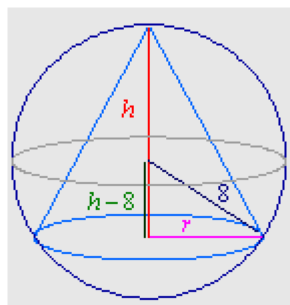
$\dfrac{dV}{dh} = \left[\dfrac{\left(16h^2-h^3\right)\pi}{3}\right]' = \dfrac{\pi}{3}\left(32h-3h^2\right) \Rightarrow$ nadjimo ekstrem: $\dfrac{dV}{dh} = 0$

$\dfrac{\pi}{3}\left(32h-3h^2\right) = \dfrac{\pi}{3}h\left(32-3h\right) = 0 \Rightarrow h_1 = 0;\;\; h_2 = \dfrac{32}{3}$

Ispitajmo vrstu ekstrema: $\dfrac{d^2V}{dh^2} = \dfrac{\pi}{3}\left(32-6h\right)$

$\left(\dfrac{d^2V}{dh^2}\right)_{h_2} = \dfrac{\pi}{3}\left(32-6\dfrac{32}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}\left(32-96\right) < 0$ daje maksimum funkcije.

Stozac visine $h = \dfrac{32}{3}$ cm, ce imati naj veci volumen.



18. Potrebno je izgraditi cjevovod od pumpne stanice do potrosaca na drugoj strani rijeke. Troskovi izgradnje cjevovoda polaganjem u zemlju iznose 50,000 kn/m a polaganje na dnu rijeke, 80000 kn/m. Izracunaj na kojoj udaljenosti x od pumpne stanice treba skrenuti trasu cjevovoda u rijeku, u smjeru potrosaca tako, da troskovi budu minimalni. Sirina rijeke je 2.5 km a vertikalna udaljenost stanice i potrosaca je 10 km.

Duzina trase u vodi: $l^2 = \left(10-x\right)^2 + 2.5^2 \Rightarrow l = \left[\left(10-x\right)^2 + 2.5^2\right]^{\frac{1}{2}}$

Troskovi iznose: Kopneni dio: $T_k = 50000x$; Dio kroz rijeku: $T_r = 80000l$

Ukupni troskovi: $T = T_k + T_r = 50000x + 80000\left[\left(10-x\right)^2 + 2.5^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dT}{dx} = \left[5\cdot10^4 x + 8\cdot10^4\left(100-20x+x^2+6.25\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = 5\cdot10^4 + \frac{8\cdot10^4\left(x-10\right)}{\left(x^2-20x+106.25\right)^{\frac{1}{2}}}$$

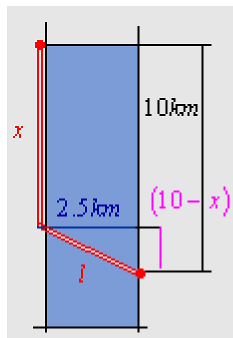
$$\frac{dT}{dx} = \frac{5\cdot10^4\left(x^2-20x+106.25\right)^{\frac{1}{2}} + 8\cdot10^4\left(x-10\right)}{\left(x^2-20x+106.25\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dT}{dx}=10^4\,\frac{5\left(425-80x+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}+16x-160}{\left(425-80x+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow \text{sredimo i potom}$$

Nadjimo ekstrem: $\dfrac{dT}{dx}=0\Rightarrow 5\cdot 10^4\left[\left(425-80x+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}+16x-160\right]=0$

$$\underline{x=7.9984}\qquad \text{odnosno}:\ T_{7.99}=65.612\cdot 10^4$$

Na ~8 km od pumpne stanice, trasu treba skrenuti u rijeku u smjeru potrosaca.



19. Troskovi dnevne proizvodnje radio aparata jedne firme, dana je jednadzbom $\frac{x^2}{4}+35x+25$. Cijena jednog radio aparata je $\left(50-\frac{x}{2}\right)$ kn. Izracunaj:

a) Dnevnu proizodnju radio aparata, koja ce donijeti najveci dohodak.

b) Dokazi da su troskovi proizvodnje jednog aparata, jednaki minimumu funkcije.

a) Dnevni dohodak jednak je ukupnoj proizvodnji minus troskovi proizvodnje.

$D=x\left(50-\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x^2}{4}+35x+25\right)$ nadjimo ekstrem:

$$\frac{dD}{dx}=\left[x\left(50-\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x^2}{4}+35x+25\right)\right]'=\left(50-\frac{x}{2}\right)-x\frac{1}{2}-\frac{2x}{4}-35=15-\frac{3x}{2}$$

$\frac{dD}{dx}=0\Rightarrow 15-\frac{3x}{2}=0 \qquad \Rightarrow \underline{x=10}$ kriticni broj je $x=10$.

Ispitajmo vrstu ekstrema: $\frac{d^2D}{dx^2}=\left(15-\frac{3x}{2}\right)'=-\frac{3}{2}<0$ maksimum.

To je ujedno i apsolutni maksimum, jer je $x=10$ jedini kriticni broj.

Potrebno je proizvesti 10 komada radio aparata za postici naj veci prihod.

b) Cijena proizvodnje jednog radio aparata : $C_{ra}=\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{x^2}{4}+35x+25}{x}$

$C_{ra}=\frac{f(x)}{x}=\frac{x}{4}+35+\frac{25}{x}$ izracunajmo ekstrem:

$$\frac{dC_{ra}}{dx}=\frac{1}{4}-\frac{25}{x^2}\Rightarrow\frac{dC_{ra}}{dx}=0\Rightarrow\frac{1}{4}-\frac{25}{x^2}=0 \qquad \Rightarrow x^2=100\Rightarrow \underline{x=10}$$

$\frac{d^2C_{ra}}{dx^2}=\left(\frac{1}{4}-\frac{25}{x^2}\right)'=\frac{50}{x^3}\Rightarrow\left(\frac{d^2C_{ra}}{dx^2}\right)_{x=10}=\frac{50}{1000}>0$ za $x=10$, minimum funkcije.

20. Izracunaj dimenzije pravokutnika za maksimalnom povrsinom, koji se moze upisati u dio omedjenim sa parabolom $y^2=4px$ i vertikalnim pravcem $x=a$.

Vrh pravokutnika ima kordinate $V(x,y)$. Povrsina pravokutnika je:

$$y^2=4px\Rightarrow x=\frac{y^2}{4p} \qquad P_{\square}=2y(a-x)=2y\left(a-\frac{y^2}{4p}\right)=2ay-\frac{y^3}{2p}$$

Trazimo ekstrem: $\frac{dP_{\square}}{dy}=\left[2ay-\frac{y^3}{2p}\right]'=2a-\frac{3y^2}{2p}$ odnosno: $\frac{dP_{\square}}{dy}=0\Rightarrow 2a-\frac{3y^2}{2p}=0$

$4ap=3y^2\Rightarrow \underline{y=\sqrt{\frac{4ap}{3}}}$ Dimenzije pravokutnika su:

$$2y = 2\sqrt{\frac{4ap}{3}} = 4\frac{\sqrt{ap}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3ap} \Rightarrow a - x = a - \frac{y^2}{4p} = a - \frac{\left(\sqrt{\frac{4ap}{3}}\right)^2}{12p}$$

$a - \frac{4ap}{12p} = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$ Potvrda, da imamo maksimum funkcije:

$$\frac{d^2P_{\square}}{dy^2} = \left[2a - \frac{3y^2}{2p}\right]' = -\frac{6y}{2p} = -\frac{3y}{p} < 0 \Rightarrow \text{maksimum}$$