

## 9. NEJEDNADZBE

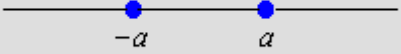
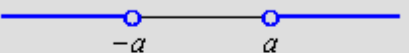
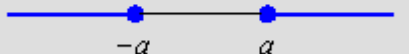
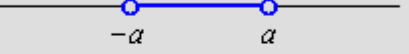
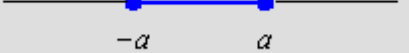
### 9.1 Svojstva nejednadzbi

Nejednadzbe su jednadzbe koje imaju umjesto znaka jednakosti, znak ">" veci od ili "<" manji od ili kombinaciju ova dva znaka sa znakom jednakosti: " $\leq$ " manje ili jednako i " $\geq$ " vece ili jednako.

Rjesenje nejednakosti je onaj skup brojeva koji zadovoljava uvjete nejednakosti.

Svojstva nejednakosti:

$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$	Zakon zbrajanja i oduzimanja
$a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$	Zakon zbrajanja i oduzimanja
$a > b \Rightarrow a^n > b^n$	Zakon za potenciranje (i korjenovanje)
$a < b \Rightarrow a^n < b^n$	Zakon za potenciranje (i korjenovanje)
$a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	Zakon za mnozenje (i djeljenje) <b>pozitivnim brojem</b>
$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	Zakon za mnozenje (i djeljenje) <b>pozitivnim brojem</b>
$a > b \Rightarrow a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$	<b>Nejednakost mijenja smisao, ako obje strane pomnozimo ili podijelimo sa negativnim brojem</b>
$a < b \Rightarrow a \cdot (-c) > b \cdot (-c)$	<b>Nejednakost mijenja smisao, ako obje strane pomnozimo ili podijelimo sa negativnim brojem</b>

Vrijednost $ x  = a$ znaci da je $\begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$	
$ x  < a \quad x < a \text{ i } x > -a \quad (-a < x < a)$ $ x  \leq a \quad x \leq a \text{ i } x \geq -a \quad (-a \leq x \leq a)$ $(a > 0)$	 
$ x  < a \quad x < a \text{ i } x > -a \quad (-a < x < a)$ $ x  \leq a \quad x \leq a \text{ i } x \geq -a \quad (-a \leq x \leq a)$ $(a > 0)$	 

Graficki prikaz funkcije apsolutne vrijednosti obicno ima oblik slova V, sa vrhom u tocki kriticne vrijednosti. To je tocka za koju je funkcija jednaka nuli. Lijevo od te tocke su vrijednosti za  $|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = -g(x)$  odnosno desno od kriticne tocke  $|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

1. Rijesi nejednakost:  $3 - 2x \geq 15$

$$3 - 2x \geq 15 \Rightarrow -2x \geq 15 - 3 \quad /(-1) \quad 2x \leq -12 \Rightarrow$$
$$\underline{x \leq -6}$$

2. Rijesi nejednakost:  $2x \leq 3 - x$

$$2x \leq 3 - x \Rightarrow 2x + x \leq 3 \Rightarrow 3x \leq 3$$
$$\underline{x \leq 1}$$

3. Rijesi nejednakost:  $\frac{3}{2}(1-x) > \frac{1}{4} - x$

$$\frac{3}{2}(1-x) > \frac{1}{4} - x \Rightarrow \frac{3}{2}(1-x) > \frac{1}{4} - x \quad / \cdot 4 \Rightarrow 6(1-x) > 1 - 4x \Rightarrow 6 - 6x > 1 - 4x$$
$$6 - 1 > -4x + 6x \Rightarrow 5 > 2x \Rightarrow \frac{5}{2} > x \Rightarrow \underline{x < \frac{5}{2}}$$

4. Rijesi nejednakost:  $-1 < 2x + 3 < 6$

$$-1 < 2x + 3 < 6 \Rightarrow -1 < 2x + 3 < 6 \quad / \text{dodajmo } (-3) \Rightarrow -1 - 3 < 2x + 3 - 3 < 6 - 3$$
$$-4 < 2x < 3 \quad / : 2 \Rightarrow \underline{-2 < x < \frac{3}{2}}$$

5. Rijesi nejednakost:  $x + 4 \geq 3(x - 3)$

$$x + 4 \geq 3(x - 3) \Rightarrow x + 4 \geq 3x - 9 \Rightarrow -2x \geq -13 \quad /(-1) \Rightarrow 2x \leq 13 \Rightarrow \underline{x \leq \frac{13}{2}}$$

6. Rijesi nejednakost:  $2x - 7 \leq 4 - (x + 2)$

$$2x - 7 \leq 4 - (x + 2) \Rightarrow 2x - 7 \leq 4 - x - 2 \Rightarrow 3x \leq 9 \Rightarrow \underline{x \leq 3}$$

7. Rijesi nejednakost:  $\frac{1}{3} - \frac{x}{2} < x + \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{3} - \frac{x}{2} < x + \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{x}{2} < x + \frac{3}{2} \quad / \cdot 6 \Rightarrow -9x < 7 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow \underline{x > -\frac{7}{9}}$$

8. Rijesi nejednakost:  $-1 < 2x + 1 < 3$       Rastavimo u dvije nejednakosti:

$$-1 < 2x + 1 < 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 < 2x + 1 \Rightarrow -2 < 2x \Rightarrow -1 < x \\ 2x + 1 < 3 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Rjesenje je: } \underline{-1 < x < 1}$$

## 9.2 Rjesavanje nelinearnih nejednadzbi

U ovom dijelu, obradjeno je rjesavanje nejednadzbi koji su u obliku polinoma ili izraza koji se mogu rastaviti na proste faktore. Metoda obuhvaca slijedece:

1. Izraz se zamijeni funkcijom i izjednaci sa nulom.
2. Definira se predznak funkcije za obje strane znaka nejednakosti.
3. Vrijednosti funkcije za koje je funkcija nula zovu se kritične vrijednosti. Funkcija mijenja predznak samo u tockama kritičnih vrijednosti.
4. Analiziraj vrijednosti funkcije za:
  - a) Lijevo od lijeve kritične vrijednosti
  - b) Izmedju lijeve i desne kritične vrijednosti
  - c) Desno od desne kritične vrijednosti
5. Oni intervali koji daju funkciji pravilni predznak zadovoljavaju zadanu nejednakost.

9. Rijesi  $x^2 - 3 > 2x$ :

Izjednacimo izraz sa nulom:  $x^2 - 2x - 3 = 0$

Rastavimo na faktore (ako je moguće)  $(x - 3)(x + 1) = 0$

Kritične vrijednosti su:  $x_1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$      $x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$

Promatrajmo funkciju za tri domene:

Ako je:  $x < -1$  funkcija  $(x - 3)(x + 1) > 0$  zadovoljava uvjete  $f(x) > 0$

Ako je:  $-1 < x < 3$  funkcija  $(x - 3)(x + 1) < 0$  *nezadovoljava* uvjete  $f(x) > 0$

Ako je:  $x > 3$  funkcija  $(x - 3)(x + 1) > 0$  zadovoljava uvjete  $f(x) > 0$

Potpuno rjesenje nejednakosti je:  $x < -1$  i  $x > 3$

10. Rijesi nejednakost:  $x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$

Izjednacimo izraz sa nulom:  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Rastavimo na faktore (ako je moguće)  $(x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

Kritične vrijednosti su:  $x_1 + 1 = 0$ ;  $x_2 - 2 = 0$ ;  $x_3 - 3 = 0$

$x_1 = -1$      $x_2 = 2$      $x_3 = 3$

Promatrajmo funkciju za cetiri domene:

Domena	$(x + 1)$	$(x - 2)$	$(x - 3)$	funkcija	zadovoljava
$x < -1$	-	-	-	$f(x) < 0$	<i>da</i>
$-1 < x < 2$	+	-	-	$f(x) > 0$	<i>ne</i>
$2 < x < 3$	+	+	-	$f(x) > 0$	<i>da</i>
$x > 3$	+	+	+	$f(x) > 0$	<i>ne</i>

Potpuno rjesenje nejednakosti je:  $x < -1$  i  $2 < x < 3$

11. Odredi vrijednost za  $x$  tako, da izraz  $\sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$  bude realni broj

To znaci da mora biti:  $\frac{x-3}{x+4} \geq 0$

Izjednacimo izraz sa nulom:  $\frac{x-3}{x+4} = 0$

Kriticne vrijednosti su:  $x_1 = 4$   $x_2 = 2$  Promatrajmo funkciju za tri domene:

Domena	$\frac{x-3}{x+4}$	funkcija	zadovoljava
$x < -4$	$\frac{-}{-}$	$f(x) > 0$	<i>da</i>
$-4 < x < 2$	$\frac{-}{+}$	$f(x) < 0$	<i>ne</i>
$x > 2$	$\frac{+}{+}$	$f(x) > 0$	<i>da</i>

Rjesenje za  $x = 2$  zadovoljava jer je  $f(2) = 0$ .

Rjesenje za  $x = -4$  ne zadovoljava jer je  $f(-4) = \frac{0}{0}$

Potpuno rjesenje nejednakosti je:  $x < -4$  i  $x \geq 2$

12. Rijesi nejednakost:  $\frac{(x-2)^2(x+3)}{4-x}$

Izjednacimo izraz sa nulom:  $\frac{(x-2)^2(x+3)}{4-x} = 0$

Kriticne vrijednosti su:  $x_1 = 4$   $x_2 = 3$   $x_3 = -3$  Promatrajmo funkciju za tri domene:

Domena	$\frac{(x-2)^2(x+3)}{4-x}$	funkcija	zadovoljava
$x < -3$	$\frac{+}{-}$	$f(x) < 0$	<i>da</i>
$-3 < x < 2$	$\frac{+}{+}$	$f(x) > 0$	<i>ne</i>
$2 < x < 4$	$\frac{+}{+}$	$f(x) > 0$	<i>ne</i>
$x > 4$	$\frac{+}{-}$	$f(x) < 0$	<i>da</i>

Potpuno rjesenje nejednakosti je:  $x < -3$  i  $x > 4$

### 9.3 Rjesavanje nejednadzbi koje sadrže apsolutne vrijednosti

13. Rijesi  $f(x) \equiv |x-3| < 2$

Imamo slucaj  $|f(x)| < n$  odnosno  $-2 < (x-3) < 2$

Rastavimo nejednakost u dva dijela:  $-2 < x-3$   $x-3 < 2$

Potpuno rjesenje je:  $1 < x$ ;  $x < 5 \Rightarrow 1 < x < 5$

14. Rijesi  $f(x) \equiv |2x-1| > 5$

Imamo slucaj  $|f(x)| > n$  odnosno  $(2x-1) > 5$

Rastavimo nejednakost u dva dijela:  $2x-1 < -5$  ili  $2x-1 > 5$

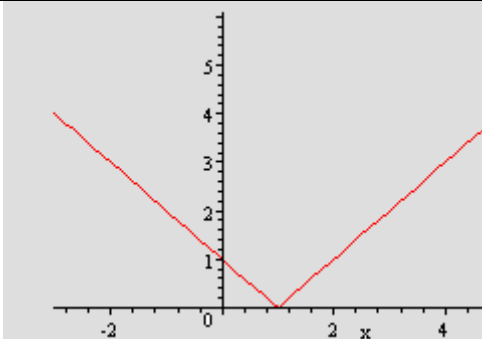
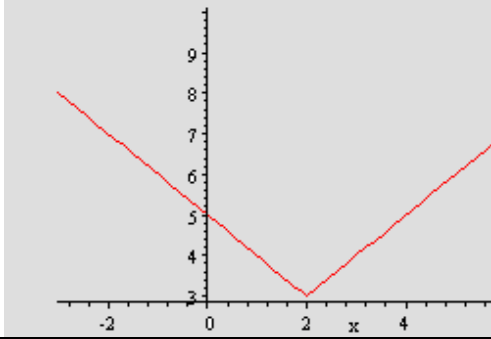
Potpuno rjesenje je:  $x < -2$   $x > 3$

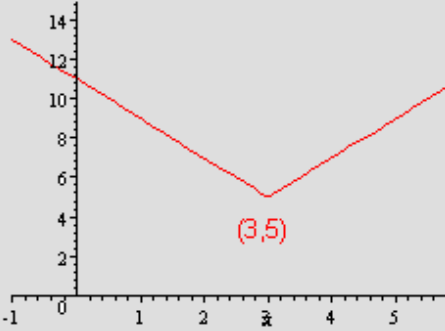
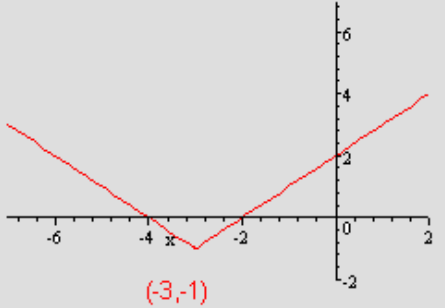
15. Rijesi  $f(x) \equiv 2\left|\frac{2x}{3}+1\right| \geq 4$

$2\left|\frac{2x}{3}+1\right| \geq 4 \quad /:2 \Rightarrow \left|\frac{2x}{3}+1\right| \geq 2$  Rastavimo nejednakost u dva dijela:

$\left|\frac{2x}{3}+1\right| \leq -2$  ili  $\left|\frac{2x}{3}+1\right| \geq 2$   $2x+3 \leq -6$   $2x+3 \geq 6$

Potpuno rjesenje je:  $x \leq -\frac{9}{2}$  i  $x \geq \frac{3}{2}$

<p>4. Prikazi graficki funkciju <math>y =  x-1 </math></p> <p>Kriticna tocka funkcije je: <math>x-1=0 \Rightarrow x=1</math></p> <p>Ispisimo tablicu vrijednosti:</p> <table style="margin-left: 100px;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	$x$	-2	-1	0	1	$y$	3	2	1	0	
$x$	-2	-1	0	1							
$y$	3	2	1	0							
<p>5. Prikazi graficki funkciju <math>y =  x-2 +3</math></p> <p>Kriticna tocka funkcije je: <math>x-2=0</math> <math>x=2, y=3</math></p> <p>Ispisimo tablicu vrijednosti:</p> <table style="margin-left: 100px;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>6</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> </tr> </table>	$x$	-1	0	1	2	$y$	6	5	4	3	
$x$	-1	0	1	2							
$y$	6	5	4	3							

<p>6. Prikazi graficki funkciju <math>y =  2x - 6  + 5</math>                      Kriticna tocka funkcije je: <math>2x - 6 = 0</math>  <math>x = 3, y = 5</math></p>	
<p>7. Prikazi graficki funkciju <math>y =  x + 3  - 1</math>                      Kriticna tocka funkcije je: <math>x + 3 = 0</math>  <math>x = -3, y = -1</math></p>	

#### 9.4 Graficko rjesavanje nejednadzbi sa dvije nepoznanice

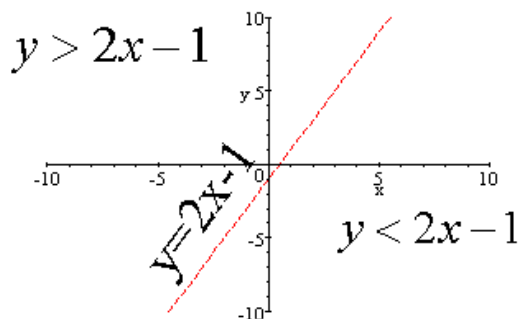
8. Rijesi graficki  $y > 2x - 1$

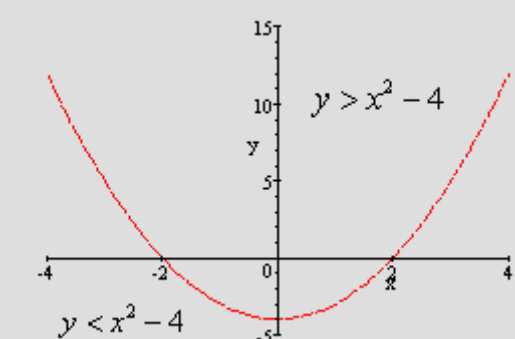
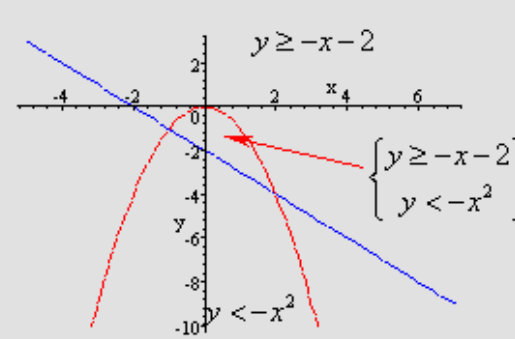
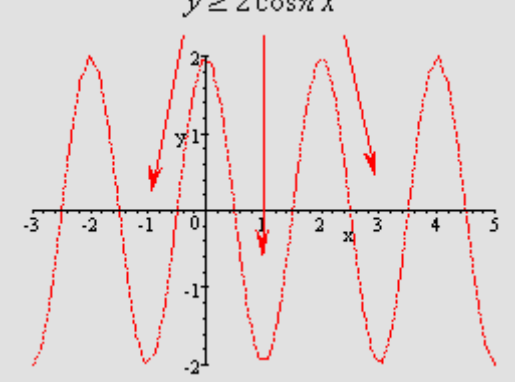
Definirajmo i nacrtajmo funkciju  $f(x) = 2x - 1$

Sve tocke za koje vrijedi  $y > 2x - 1$  jesu iznad linije pravca  $y = 2x - 1$

Sve tocke za koje vrijedi  $y = 2x - 1$  jesu na liniji pravca  $y = 2x - 1$

Sve tocke za koje vrijedi  $y < 2x - 1$  jesu ispod linije pravca  $y = 2x - 1$



<p>9. Rijesi graficki: <math>y &gt; x^2 - 4</math></p> <p>Rjesenje je podrucje unutar krivulje <math>y = x^2 - 4</math></p>	
<p>10. Rijesi graficki: <math>y \geq -x - 2 \Rightarrow y + x^2 &lt; 0</math></p> <p style="text-align: center;"><math>y &lt; -x^2</math></p> <p>Rjesenje je podrucje unutar zadanih krivulja: Tocke na krivulji <math>y &lt; -x^2</math> ne pripadaju skupu rjesenja</p>	
<p>11. Rijesi graficki: <math>y \geq 2 \cos \pi x</math></p> <p>Rjesenje je podrucje oznaceno na slici. Tocke na krivulji su ukljucene u rjesenje</p>	
<p>12. Rijesi graficki: <math>y &gt; \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y \leq 4x - x^2</math></p> <p>Tocke na krivulji <math>y \leq 4x - x^2</math> su ukljucene u rjesenje, dok tocke na krivulji <math>y &gt; \frac{1}{2}x^2</math> nisu ukljucene u rjesenje.</p>	