6. Jednadzbe Viseg Reda

Metoda, kada je jednadzba zadana u obliku polinoma n - tog stupnja

U ovom dijelu su opisane metode za rjesavanje jednadzbi viseg reda koje su zadane u obliku polinoma n-tog stupnja. Za pronalazeje rjesenja tako zadane jednadzbe, potrebno je slijediti odgovarajuci redosljed u racunanju, koji je objasnjen u nastavku.

Teorem ostatka i teorem faktora

Poznato je, da se svaki polinom moze izraziti kao zbroj faktora koji sadrze nezavisno promjenjivu: $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$

Djeljenje polinoma sa binomom, moze se prikazati:

$$\frac{f(x)}{(x-r)} = q(x) + R \Rightarrow f(x) = (x-r)q(x) + R \qquad \rightarrow \text{R je ostatak dijeljenja}$$

Teorem ostatka glasi:

Ako polinom $f(x)$ podijelimo sa $(x-r)$, do konstantnog ostatka R, tada je funkcija na mjestu r, $f(r) = R$

Primjer: $f(x) = 3x^3 - x^2 - 20x + 5$ podijelimo sa $(x+4), r = -4$

$$(3x^3 - x^2 - 20x + 5):(x+4) = 3x^2 - 13x + 32 \qquad \text{i ostatak } R = -123$$

$$f(r) = f(-4) = 3(-4)^3 - 4(-4)^2 - 20(-4) + 5 = -123 \qquad \Rightarrow f(r) = f(-4) = R = -123$$

Teorem faktora glasi:

Ako je $f(r) = R = 0$ tada je $(x-r)$ faktor od $f(x)$, odnosno:

$$\text{Ako je } f(r) = 0 \text{ tada:} \begin{cases} x = r \text{ je nula funkcije } f(x) \\ (x-r) \text{ je faktor od funkcije } f(x) \\ x = r \text{ je korjen jednadzbe } f(x) = 0 \end{cases}$$

Primjer: Da li je $(x-r) = (x+1)$, faktor od $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$?

$$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 0$$

$$f(r) = 0 \Rightarrow (x-r) \text{ je faktor funkcije } f(x)$$

1. Izracunaj ostatak R obicnim djeljenjem i potom teoremom ostatka:

$$\left(x^3+2x^2-x-2\right):\left(x-1\right)=x^2+3x+2, \;\Rightarrow \text{ostatak } R=0$$

$$\begin{array}{l}
\underline{{}_{-}x^3 - {}_{+}x^2} \\
\quad 3x^2 - x \\
\quad \underline{{}_{-}3x^2 - {}_{+}x} \\
\qquad 2x-2 \\
\qquad \underline{{}_{-}2x - {}_{+}2} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Provjerimo teoremom ostatka:

$$f(1)=(1)^3+2(1)^2-(1)-2=0$$
$$f(r)=f(1)=R=0$$

2. Izracunaj: $\left(2x^5-x^2+8x+44\right):\left(x+2\right)\;\Rightarrow r=-2$ postupak djeljenja nije prikazan

$$\left(2x^5-x^2+8x+44\right):\left(x+2\right)=2x^4-4x^3+8x^2-17x+42 \quad R=-40$$

Provjera teoremom ostatka: $f(r)=f(-2)=2(-2)^5-(-2)^2+8(-2)+44=-40$

3. Odredi da li je broj $r=2$, nula funkcije $f(x)=x^3-2x^2-9x+18$.

$$f(2)=(2)^3-2(2)^2-9(2)+18=0$$
$$f(r)=f(2)=R=0$$

$r=2$ jeste nula funkcije, jer je $f(r)=f(2)=R=0$

4. Za koje vrijednosti od k, je izraz $(x-2)$ faktor funkcije $f(x)=2x^3-kx^2-x+14$?

$$\left(2x^3-kx^2-x+14\right):\left(x-2\right)=2x^2-x(4-k)+(7+2k) \qquad R=28+4k$$

Da bi uvjet bio zadovoljen, mora biti $R=0=28+4k\Rightarrow \quad k=-7$

Sinteticko Djeljenje

Sinteticko djeljenje je metoda djeljenja polinoma po odredjenom postupkom:

a) Polinom se upise sa potencijama u padajucem nizu. Clan koji nedostaje, zamjenjuje se nulom.

b) Na desnoj strani izraza, upisemo broj r

c) Dva reda nize, podvucemo crtu i prepisemo clan uz naj visu potenciju.
Pomnozimo taj broj sa r i rezultat upisemo u drugom redu ispod druge znamenke zadanog izraza.

d) Zbrojimo znamenke u prvom (zadanom) redu i tu novu znamenku. Rezultat upisemo ispod, u treci red, do clana koji je vec upisan (clan uz naj visu potenciju).

e) Taj novi broj pomnozimo sa r i ponovimo cjelokupni postupak.

f) Zadnji clan je ostatak R a brojevi u trecem redu su koeficijenti uz nepoznanicu x, jednu potenciju nize.

Primjer:

Podijeli $\left(x^5+2x^4-4x^2+3x-4\right):\left(x+3\right)$

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & x^5+2x^4-4x^2+3x-4 & & & & & & \lfloor -3 & & \\
\text{a),b)} & 1 & 2 & 0 & -4 & 3 & -4 & & & \\
\text{c)} & & -3 & 3 & -9 & 39 & -126 & -3=1\cdot\lfloor -3 & & -1\cdot\lfloor -3=3 \\
\hline
\text{d),e),f)} & 1 & -1 & 3 & -13 & 42 & \underline{-130} & -1=2+\left(-3\right) & & 0+3=3 \\
\end{array}
$$

Rezultat je: $1x^4-1x^3+3x^2-13x+42 \qquad \underline{R=-130}$

5. Sintetickim djeljenjem odredi da li je $x-4$ faktor izraza $f\left(x\right)\ =x^4+2x^3-12x^2+32x-16$

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{5}{l}{x^4+2x^3-15x^2-32x-16} & \\
1 & 2 & -15 & -32 & -16 & \lfloor 4 \\
 & 4 & 24 & 36 & 16 & \\
\hline
1 & 6 & 9 & 4 & 0 & \Rightarrow \text{Ostatak je nula, } x-4 \text{ je faktor } f(x) \\
\end{array}
$$

$\left(x^4+2x^3-15x^2-32x-16\right):\left(x-4\right)=1x^3+6x^2+9x+4,$ ostatak je 0

Korjeni jednadzbe

Osnovni teorem algebre nas uci da svaka jednadzba u obliku polinoma ima barem jedan korjen, koji moze biti realan ili kompleksan broj.

$$f\left(x\right)=\left(x-r\right)f_1\left(x\right) \quad \Rightarrow f_1\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{\left(x-r\right)}$$

Ako to primijenimo na slijedeci izraz, dobijemo:

$$f\left(x\right)=a\left(x-r\right)\left(x-r_1\right)...\left(x-r_n\right)$$

a) Polinom n-og stupnja se moze prikazati kao produkt linearnih faktora
b) Svaka jednadzba n-og stupnja ima n korjena
c) Ako je nula funkcije oblika $\left(a+bi\right)$, tada je rjesenje i konjugirani broj $\left(a-bi\right)$

Razvij zadani izraz u produkt faktora, ako je poznato jedno rjesenje:

$$3x^3+10x^2-16x-32=0 \qquad x_1=-\frac{4}{3}$$

$$
\begin{array}{lllll}
3 & 10 & -16 & -32 & \lfloor -\frac{4}{3} \\
 & -4 & -8 & 32 & \\
\hline
3 & 6 & -24 & 0 & \\
\end{array}
$$

$3 \quad 6 \quad -24 \qquad 0 \Rightarrow R=0,\ x_1=-\frac{4}{3}$ jeste jedno rjesenje.

$$3x^2+6x-24=0 \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases} x_2=-4 \\ x_3=2 \end{cases}$$

$$f(x)=3x^3+10x^2-16x-32=\left(x+\frac{4}{3}\right)(x+4)(x-2)$$

6. Razvij zadani izraz u produkt faktora, ako je poznato jedno rjesenje:

$$2x^4-5x^3+11x^2-3x-5=0 \quad x_1=1+2i$$

2	-5	11	-3	-5	$\lvert 1+2i$
	$2+4i$	$-11-2i$	$4-2i$	5	
2	$-3+4i$	$-2i$	$1-2i$	$0 \Rightarrow R=0, x_1=(1+2i)$ jeste jedno rjesenje.	
	$2-4i$	$-1+2i$	$-1+2i$	0	$\lvert 1-2i \Leftarrow$ Uvodimo konjugirano-kompleksno rjesenje
2	-1	-1	0	$0 \Rightarrow R=0, x_2=(1-2i)$ jeste drugo rjesenje.	

$$2x^2-1x-1=0 \qquad \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases} x_3=1 \\ x_4=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x)=2x^4-5x^3+11x^2-3x-5=(1+2i)(1-2i)(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Izracunavanje Racionalnih i Iracionalnih korjena polinomske jednadzbe viseg reda

Znamo da se jednadzba viseg reda moze napisati u obliku:

$$f(x)=(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_k)f_{k+1}(x)$$

$$f(x)=a_0\left(x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}\ldots+\frac{a_n}{a_0}\right)=0$$

$a)$ Ako je faktor a_0 uz najvisu potenciju polinoma, razliciti od 1, tada su korjeni jednadzbe razlomljeni racionalni brojevi. Korjen jednadzbe se moze prikazati kao omjer a_0 i a_n.

$$r_n=\frac{\text{brojevi koji cine } a_n}{\text{brojevi koji cine } a_0}$$

Primjer: $\quad 4x^3-3x^2-25x-6=0 \qquad a_0=4,\ a_n=6$

$\rightarrow$ Ukupno imamo 4 rjesenja, koja su racionalni brojevi i visekratnici su broja 6 i 4.

$\rightarrow$ Moguca: $\quad r_n=\dfrac{\text{brojevi koji cine } a_n}{\text{brojevi koji cine } a_0}=\dfrac{1,2,3,6}{1,2,4}=\pm1,\pm\dfrac{1}{2},\pm2,\pm3,\pm\dfrac{3}{2},\pm\dfrac{3}{4},\pm6$

Rjesenja zadanog primjera jesu: $-2,\ 3,\ -\dfrac{1}{4}$

Definiranje predznaka korjena

Deskartes-ovo pravilo omogucava odredjivanje broja pozitivnih i negativnih rjesenja polinomske jednadzbe viseg reda.

a) Broj pozitivnih rjesenja jednak je broju promjena predznaka u zadanom polinomu.

b) Broj negativnih rjesenja jednak je broju promjena predznaka u zadanom polinomu na mjestu $f(-x)$.

Primjer: $3x^3 - x^2 - x + 4 = 0 \quad \Rightarrow$ Jednadzba ima ukupno tri korjena:

$$\underbrace{+3x^3 - x^2}_{\text{Prva promjena}} \underbrace{-x + 4}_{\text{Druga promjena}} = 0 \quad \Rightarrow \text{ dva pozitivna korjena i}$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - (-x)^2 - (-x) + 4 = -3x^3 - x^2 + x + 4$$

$$-3x^3 \underbrace{-x^2 + x}_{\text{Jedna promjena}} + 4 = 0 \quad \Rightarrow \text{ jedan negativan korjen.}$$

Kompletno pravilo za odredjivanje korjena polinomske jednadzbe viseg reda

a) Jednadzba ima ukupno n-korjena (n je naj visa potencija polinoma)

b) Kompleksni korjeni su uvijek u paru sa svojim konjugirano-kompleksnim korjenom

c) Svaki racionalni korjen jednak je omjeru visekratnika koji cine konstantni clan polinoma i visekratnik faktora uz najvisu potenciju polinoma.

d) Najvisi broj pozitivnih korjena jednak je broju pozitivnih promjena $f(x)$ a najvisi broj negativnih korjena jednak je broju promjena fumkcije na mjestu $f(-x)$.

e) Kad se jednom izracuna n - 2 korjena, primijenjuje se kvadratna formula za pronalazenje preostala dva rjesenja.

7. Rijesi: $f(x) \equiv x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 4x - 16 = 0$

a) Ukupno ima 4 korjena

b) Visekratnici od 16: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$

c) $\overbrace{+x^4 - 7}^{1}\underbrace{x^3 + 12}_{2}x^2 + 4\underbrace{x - 1}_{3}6 \quad \Rightarrow$ imamo tri pozitivna i

$$(-x)^4 - 7(-x)^3 + 12(-x)^2 + 4(-x) - 16 =$$

$$= x^4 + 7x^3 \underbrace{+12x^2 - 4x}_{1} - 16 \quad \Rightarrow \text{ jedno negativno rjesenje.}$$

Izracunavanje korjena pocinjemo metodom pokusaja: probajmo najprije sa brojem 1.

Sintetickim djeljenjem za $r = 1$ ispitajmo da li je to korjen jednadzbe:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -7 & 12 & 4 & -16 & \underline{1} \\ & 1 & -6 & 6 & 10 & \\ \hline 1 & -6 & 6 & 10 & -6 & \end{array}$$

Ostatak je $-6 \neq 0$ 1 nije korjen jednadzbe. Probajmo sa $r = -1$:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -7 & 12 & 4 & -16 & \underline{-1} \\ & -1 & 8 & -20 & 16 & \\ \hline 1 & -8 & 20 & -16 & 0 & \end{array}$$

Ostatak je 0 $\quad -1$ jeste korjen jednadzbe. Nastavimo sa brojem $r = 2$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -8 & 20 & -16 & \underline{2} \\ & 2 & -12 & 16 & \\ \hline 1 & -6 & 8 & 0 & \end{array}$$

Ostatak je 0 $\quad 2$ jeste korjen:

Do sada imamo dva poznata korjena: $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Preostalo je $n = 2$ rjesenja

Sada primijenimo kvadratnu formulu:

$$1x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

Korjeni zadane jednadzbe su: $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4$

8. Rijesi: $f(x) \equiv 2x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$

a) Ukupno ima 5 korjena

b) Visekratnici od $a_0 = 2, a_n = -1$: Moguca rjesenja su: $\frac{a_n}{a_0} \Rightarrow \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$

c) $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 1$ $\Rightarrow$ imamo najvise 5 pozitivnih promjena

$f(-x) = -2x^5 - 5x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 4x - 1$ $\Rightarrow$ nema realnih negativnih rjesenja.

Sintetickim djeljenjem za $r = 1$ ispitajmo da li je to korjen jednadzbe:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 2 & -5 & 6 & -6 & 4 & -1 & \underline{1} \\ & 2 & -3 & 3 & -3 & 1 & \\ \hline 2 & -3 & 3 & -3 & 1 & 0 & \end{array}$$

1 jeste korjen jednadzbe. Probajmo sa $r = 2$:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -3 & 3 & -3 & 1 & \underline{2} \\ & 4 & 2 & 10 & 14 & \\ \hline 2 & 1 & 5 & 7 & 15 & \end{array}$$

Ostatak je 15 $\quad 2$ nije korjen jednadzbe. Nastavimo sa brojem $r = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -3 & 3 & -3 & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & -1 & 1 & -1 & \\ \hline 2 & -2 & 2 & -2 & 0 & \end{array}$$

Ostatak je 0 $\quad \frac{1}{2}$ je korjen: Ispitajmo opet za $r = 1$(1je dvostruko rjesenje)

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -2 & 2 & -2 & \underline{1} \\ & 2 & 0 & 2 & \\ \hline 2 & 0 & 2 & \color{red}{0} & \end{array}$$

Ostatak je $\color{red}{0}$ 1 je korjen:

Do sada imamo tri poznata korjena: $x_1 = 1,\ \ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1.$

Sada mozemo primijeniti kvadratnu formulu:

$$2x^2 - 2 = 0 \qquad 2\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad x_{4,5} = \pm\sqrt{-1} = \begin{cases} x_4 = i \\ x_5 = -i \end{cases}$$

Korjeni zadane jednadzbe su: $x_1 = 1,\ \ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = i,\ x_5 = -i$