5. GEOMETRIJA

5.1 Opcenito o kutevima

Poznate su slijedece vrste kuteva:

siljasti kut $\alpha < 90^\circ$ pravi kut $\alpha = 90^\circ$ tupi kut $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

ravni kut $\alpha = 180^\circ$ izboceni kut $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ puni kut $\alpha = 360^\circ$

Komplementi kutevi - su kutevi ciji je zbroj 90° : $\alpha + \beta = 90^\circ$

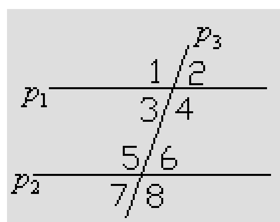
Suplementni kutevi - su kutevi ciji je zbroj 180° : $\alpha + \beta = 180^\circ$

Vrsni kutevi - su 4 kuta koji nastaju kada se dva pravca sijeku. Dva i dva kuta su jednaka. Dva kuta, razlicita po velicini, su ujedno suplementni kutevi.

Kutevi koji nastaju kada pravac - transferzala, sjece dva paralelna pravca, imaju slijedece karakteristike:

Zbroj unutarnjih kuteva je 180° : $\angle 4 + \angle 6 = \angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$

Neki su kutevi jednaki: $\angle 1 = \angle 5;\ \ \angle 2 = \angle 6;\ \ \angle 3 = \angle 7;\ \ \angle 4 = \angle 8$

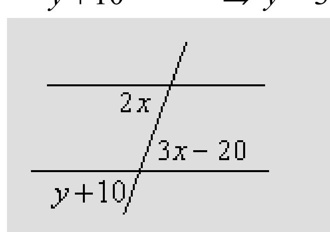


1. Izracunaj vrijednost za x i y, ako su poznate velicine zadane na slici.

Kutevi su jednaki: $2x = 3x - 20 \quad \Rightarrow x = 20°$

$2x = y + 10$

$2 \cdot 20^\circ = y + 10 \quad \Rightarrow y = 30°$



1. Dva kuta su suplementna, velicine $\alpha = 7x - 27 \;\; i \;\; \beta = 2x$. Izracunaj kuteve.

   $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow (7x - 27) + 2x = 180° \Rightarrow 9x = 180° - 27° \Rightarrow x = 23°$

   $\alpha = 7x - 27 = 7 \cdot 23° - 27° = 134°$

   $\beta = 2x = 2 \cdot 27° = 46°$

2. Pod kojim kutem se sjeku dva pravca, ako je omjer kuteva $\alpha : \beta = 2:3$. Izracunaj kut α.

   $\alpha + \beta = 180° \;\; \Rightarrow$ zamijenimo $\alpha = 2x,\ \beta = 3x \Rightarrow 2x + 3x = 180° \Rightarrow x = 36°$

   $\alpha = 2x = 2 \cdot 36° = 72°$

3. Dva komplementna kuta su $\alpha = 3x,\ \beta = x$. Izracunaj kuteve.

   $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow 3x + x = 90° \Rightarrow 4x = 90° \qquad x = 22.5°$

   $\alpha = 3x = 3 \cdot 22.5° = 67.5°$

   $\beta = x = 22.5°$

4. Dva komplementna kuta su $\alpha = (x + 30)°,\ \beta = (x - 10)°$. Izracunaj kuteve.

   $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow x + 30 + (x - 10) = 90° \Rightarrow 2x = 70° \quad x = 35°$

   $\alpha = x + 30° = 35° + 30° = 65°$

   $\beta = x - 10° = 35° - 10° = 25°$

5. Dva su kuta komplementna; $\alpha = x,\ \beta = 2x + 30°$. Izracunaj kuteve.

   $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow x + 2x + 30 = 90° \Rightarrow 3x = 60° \qquad x = 20°$

   $\alpha = x = 20° \qquad\qquad \beta = 2x + 30° = 2 \cdot 20° + 30° = 70°$

6. Dva suplementna kuta imaju vrijednosto $\alpha = x + 20 \; i \; \beta = 2x + 1$. Izracunaj α i β

   $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow x + 20 + 2x + 1 = 180° \Rightarrow 3x = 159° \;\Rightarrow x = 53°$

   $\alpha = x + 20° = 53° + 20° = 73°$

   $\beta = 2x + 1 = 2 \cdot 53° + 1 = 107°$

7. Pravac sjece dva paralelna pravca tako da su kutevi unutar paralelnih pravaca imaju vrijednosti$\alpha = 3x + 1 \; i \; \beta = 2x - 6$. Izracunaj kuteve.

   $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow 3x + 1 + 2x - 6 = 180° \Rightarrow 3x = 185° \Rightarrow x = 37°$

   $\alpha = 3x + 1 = 3 \cdot 37° + 1° = 112°$

   $\beta = 2x - 6 = 2 \cdot 37° - 6° = 68°$

5.2 Ono naj vaznije o trokutima

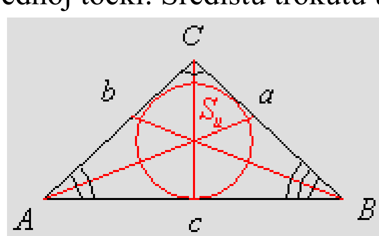
Trokut je geometrijski lik omedjen sa tri stranice koje mogu biti jednake ili razlicite po duzini.
Zbroj kuteva u trokutu je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Vanjski kut uz bilo koji vrh trokuta, jednak je zbroju unutarnji kuteva uz preostal dva vrha.
Zbroj dviju stranica trokuta je uvijek veci od trece stranice.
Razlika dviju stranica trokuta je uvijek manja od trece stranice.
Simetrala kuta sjece suprotnu stranicu u omjeru duzina stranica koje cine taj kut.
Visina trokuta na bazu, sjece bazu na dva dijela. Tada je $(\text{visina})^2 = (\text{lijevi dio})(\text{desni dio})$
Povrsina trokuta jednaka je : $(\text{baza} \cdot \text{visina})/2$.
Povrsina trokuta se racuna i ovako: $\triangle P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, gdje je $2s = a+b+c$.
Kosinuson, sinusov i Pitagorin poucak obradjeni su u dijelu trigonometrija
Sukladnost trokuta:

1. Dva su trokuta sukladna ako imaju sve tri stranice jednake.
2. Dva su trokuta sukladna ako imaju jednake dvije stranice i kut medju njima.
3. Dva su trokuta sukladna ako imaju jednake jednu stranicu i dva prilezeca kuta toj stranici.

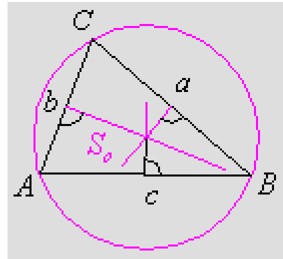
Slicnost trokuta:

a) Ako su dva trokuta (ili bilo koja dva lika) slicna, tada su njihovi odgovarajuci djelovi (elementi) proporcionalni.
b) Dva su trokuta slicna ako imaju jednaka barem dva kuta.
c) Omjer opsega dva slicna trokuta je konstantan i proporcionalan je omjeru pripadnih stranica: $(O_1/O_2) = (a_1/a_2) = (b_1/b_2) = (c_1/c_2)$.
d) Omjer povrsina dva slicna trokuta je konstantan i jednak omjeru pripadajucih stranica na kvadrat: $(P_1/P_2) = (a_1/a_2)^2 = (b_1/b_2)^2 = (c_1/c_2)^2$.

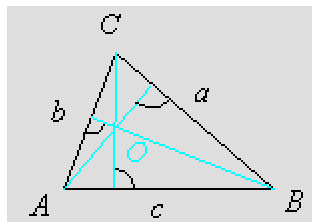
Simetrala kuteva - je duzina koja spaja vrh trokuta sa stranicom trokuta i simetrala je doticnog kuta. Sve tri simetrale se sjeku u jednoj tocki: Sredistu trokutu upisane kruznice.



Okomice povucene na polovista stranica trokuta, sjeku se u jednoj tocki koja je:
Srediste trokutu opisane kruznice.



Okomice povucene iz vrha trokuta na suprotne stranice, sjeku se u jednoj tocki: Ortocentru trokuta. Ono lezi unutar ostrokutog trokuta odnosno izvan trokuta, ako je trokut tupokutan.

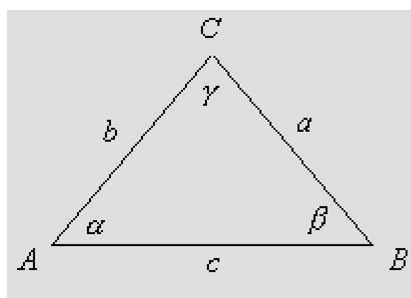


1. Kutevi uz bazu istokracnog trokuta su: $\alpha = (3x-1)$ i $\beta = (2x+16)$. Izracunaj sve kuteve.

   $\alpha = \beta \;\; \Rightarrow 3x-1 = 2x+16 \Rightarrow \; x = 17$

   $\alpha = 3x-1 = 3\cdot17-1 = 50°$ $\quad \beta = 2x+16 = 2\cdot17+16 = 50°$

   $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 100° = 80°$

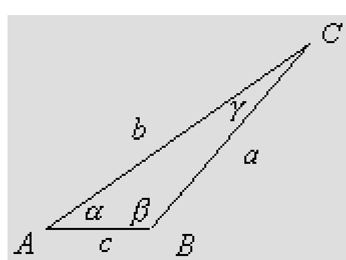


2. Kutevi u trokutu imaju vrijednosti: $\alpha = 3x+1$, $\beta = 10x+11$ i $\gamma = x+2$. Izracunaj kuteve.

   $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \quad 3x+1+10x+11+x+2 = 180° \Rightarrow 14x = 168 \;\; \Rightarrow x = 12°$

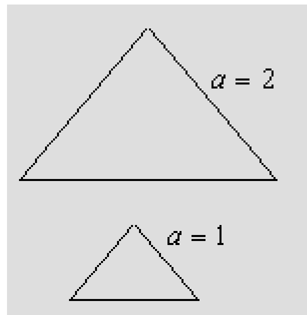
   $\alpha = 3x+1 = 3\cdot12+1 = 35°$ $\qquad \beta = 10x+11 = 10\cdot12+11 = 131°$

   $\gamma = x+2 = 12+2 = 14°$



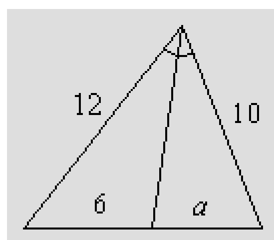
3. Zadana su dva slicna trokuta koji imaju omjer stranica $a_1 : a_1 = 1:2$.
   a) Izracunaj opseg prvog trokuta ako je opseg drugog $\triangle O_2 = 12$
   b) Izracunaj povrsinu prvog trokuta ako je povrsina drugog $\triangle P_2 = 12$.

$$a)\ \frac{O_1}{O_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow O_2 = \frac{O_1}{2} = \frac{12}{2} = 6 \qquad \text{b)}\ \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow P_1 = \frac{P_2}{4} = \frac{12}{4} = 3$$



4. Simetrala kuta γ sjece bazu na dva dijela. Poznavajuci velicine sa slike, izracunaj duzinu a.

   Iz definicije imamo: $\frac{6}{a} = \frac{12}{10} \Rightarrow \qquad a = 5$



5. Kut izmedju jednakih stranica istokracnog trokuta iznosi 50°. Izracunaj preostala dva kuta.

   $\alpha + \beta + \gamma = 180° = \alpha + \beta + 50° \Rightarrow \alpha + \beta = 130°$

   U istokracnom trokutu: $\alpha = \beta = \frac{130°}{2} = 65°$

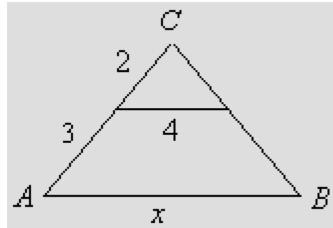
6. Omjer kuteva u trokutu je 1:5:6. Odredi koje je vrste trokut.

   $1x + 5x + 6x = 180° \quad \Rightarrow \quad 12x = 180° \quad x = 15°$

   $\alpha = 1x = 15° \quad \beta = 5x = 5 \cdot 15° = 75° \quad \gamma = 6x = 6 \cdot 15° = 90° \Rightarrow$ Trokut je pravokutan

7. Zadan je trokut prema slici. Koristeci slicnost trokuta izracunaj bazu x trokuta.

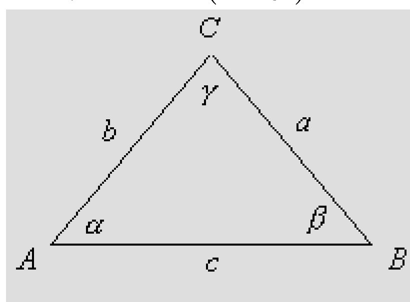
   Iz slicnosti trokuta postavimo jednakost: $\frac{2}{(2+3)} = \frac{4}{x} \qquad \Rightarrow x = 10$



8. Zadani su kutevi istokracnog trokuta: $\alpha = 3x-1$ i $\beta = 2x+16$. Izracunaj kut γ.

   $\alpha = \beta \;\Rightarrow 3x-1 = 2x+16 \Rightarrow x = 17°$

   $\alpha = 3x-1 = 3\cdot 17 - 1 = 50° \qquad \gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 100° = 80°$

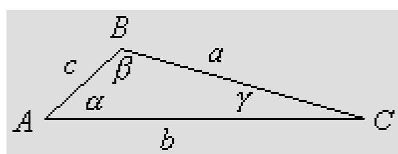


9. Zadani su kutevi trokuta: $\alpha = 3x-1$ i $\beta = 10x+11$ i $\gamma = x+2$. Izracunaj kuteve

   $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow 3x-1+10x+11+x+2 = 180° \Rightarrow 14x = 168 \Rightarrow x = 12°$

   $\alpha = 3x-1 = 3\cdot 12 - 1 = 35° \qquad \beta = 10x+11 = 10\cdot 12 + 11 = 131°$

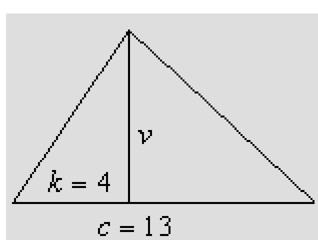
   $\gamma = x+2 = 12+2 = 14°$



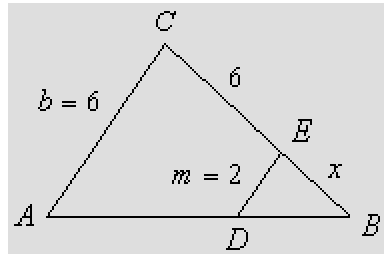
10. Zadan je trokut sa stranicom $c = 13$ i lijevim dijelom baze nastale nakon sto je povucena visina, $k = 4$. Izracunaj visinu trokuta v.

    Po definiciji imamo: $(\text{visina})^2 = (\text{lijevidio})(\text{desnidio}) \Rightarrow v^2 = 4\cdot(13-4) = 4\cdot 9 = 36$

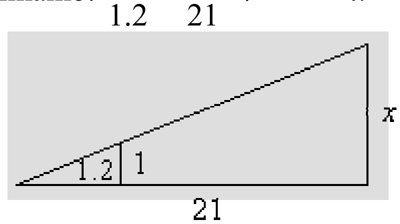
    $v = 6$



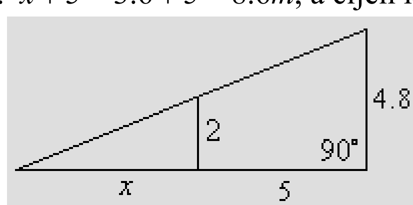
11. U trokutu su stranica m i b paralelne. Izracunaj stranicu x ako su poznate velicine sa slike.
Iz $\triangle$ABC imamo stranice $b = 6$ i $a = 6 + x$ a iz trokuta $\triangle$DBE stranice $m = 2$ i x.
Trokuti su slicni pa iz omjera stranica imamo: $\frac{6}{2} = \frac{6+x}{x} \Rightarrow 6x = 12 + 2x \Rightarrow x = 3$



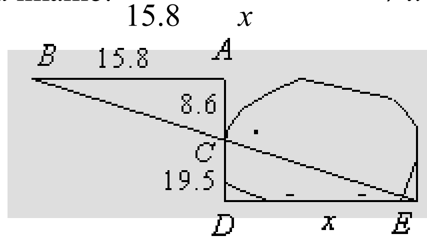
12. Stap duzine 1m ima sjenu dugu 1.2m a zgrada ima sjenu dugu 21m. Izracunaj visinu zgrade.
Iz omjera slicnih trokuta imamo: $\frac{1}{1.2} = \frac{x}{21} \Rightarrow \qquad x = 17.5m$



13. Vrh krova kuce visok je 4.8m u odnosu na horizontalni dio krova. Podupora visoka 2m je na udaljenosti 5m od osi vrha. Izracunaj sirinu krova.
Iz omjera slicnih trokuta imamo: $\frac{x}{x+5} = \frac{2}{4.8} \Rightarrow x = 3.6m$
Polovica krova je siroka: $x + 5 = 3.6 + 5 = 8.6m$, a cijeli krov dvostruko: $17.2m$



14. Mjerenjerenjem su utvrdjene zadane duzine. Odredi duzinu objekta x.
Iz omjera slicnih trokuta imamo: $\frac{8.6}{15.8} = \frac{19.5}{x} \qquad \Rightarrow x = 35.82m$



5.3 Ponesto o kruznicama

Kruznica je geometrijsko mjesto tocaka koje su jednako udaljene od jedne cvrste tocke, koja se zove srediste S. Udaljenost od sredista zove se radijus ili polumjer; $r = \overline{SF}$.

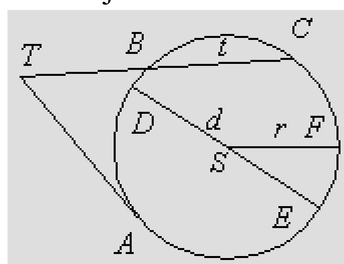
Duzina koja spaja dvije tocke na kruznici i prolazi sredistem zove se dijametar ili promjer $d = \overline{DE}$.

Pravac koji je povucen iz tocke van kruznice, na kruznicu je:

a) tangenta - dira kruznicu u jednoj tocki, A

b) sekanta - sjece kruznicu u dva nejednaka dijela.

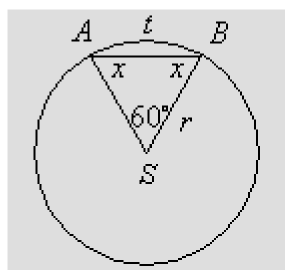
Duzina sekante koja pada unutar kruznice je tetiva $t = \overline{BC}$.



1. Tetiva duzine 12, sjece kruznicu i pripadajuci luk toj tetivi je 60°. Izracunaj radijus kruznice.

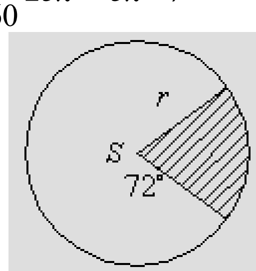
   Iz trokuta $\triangle$ASB imamo: $x + x + 60° = 180° \Rightarrow 2x = 120° \Rightarrow \qquad x = 60°$

   Trokut je istostranican.



2. Izracunaj povrsinu kruznog isjecka koji ima unutarnji kut $\alpha = 72°$ a radijus kruznice je $r = 5$.

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2\pi = \frac{72}{360}5^2\pi = \frac{72}{360}25\pi = 5\pi \Rightarrow \qquad P = 5\pi$$

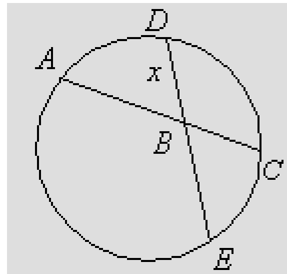


3. Dvije tetive se sjeku tako da su segmenti velicine :$\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 4, \overline{BE} = 8, \overline{DB} = x$.

   Iracunaj duzinu segmenta x.

   Iz definicije o tetivama: Produkt segmenata na tetivama je jednak.

   $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{DB} \cdot \overline{BE} \Rightarrow 10 \cdot 4 = x \cdot 8 \Rightarrow x = 5$

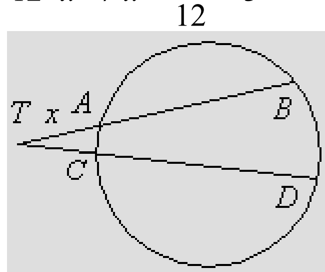


4. Iz iste tocke van kruznice povucene su sekante na kruznicu. Segmenti tetiva su velicine:

   $\overline{TB} = 12, \overline{TC} = 4, \overline{TD} = 9$. Iracunaj duzinu segmenta $\overline{TA} = x$.

   Iz definicije o sekantama: Produkt segmenata na sekantama je jednak.

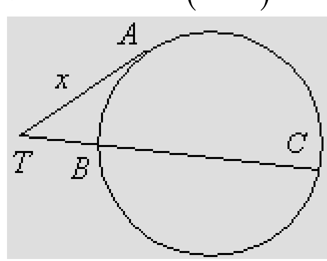
   $\overline{TD} \cdot \overline{TC} = \overline{TB} \cdot \overline{TA} \Rightarrow \quad 9 \cdot 4 = 12 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{36}{12} = 3$



5. Iz iste tocke van kruznice povucene su sekanta i tangenta na kruznicu. Segmenti su velicine:

   $\overline{TB} = 3, \overline{BC} = 9$. Iracunaj duzinu tangente $\overline{TA} = x$.

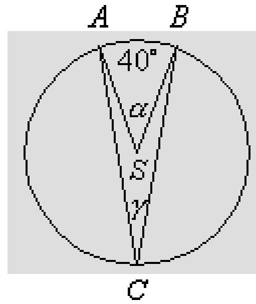
   Iz definicije znamo: $\overline{TA}^2 = \overline{TC} \cdot \overline{TB} \Rightarrow x^2 = (9+3) \cdot 3 = 36 \Rightarrow x = 6$



6. Zadani su sredisnji i obodni kut, koji pripadaju istom luku od $\alpha = 40°$. Izracunaj obodni kut.

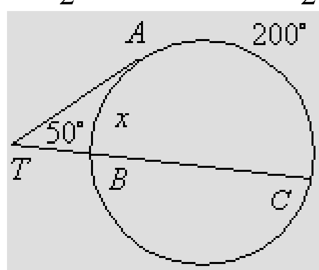
   Po definiciji: Sredisnji i obodni kut koji pripadaju istom luku odnose se u omjeru 1:2

   $\alpha : \beta = 2 : 1 \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{40°}{2} = 20°$



7. Izracunaj luk $\overset{\frown}{AB}$ ako je poznati kut u vrhu T i luk $\overset{\frown}{AC}$.

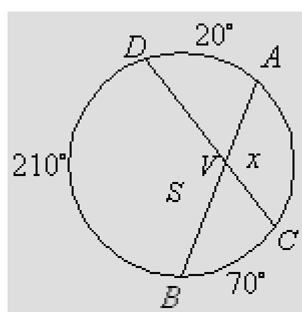
Po definiciji je: $\angle T = \dfrac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow 50° = \dfrac{200° - x}{2} \Rightarrow 2 \cdot 50° = 200° - x \Rightarrow \quad x = 100°$



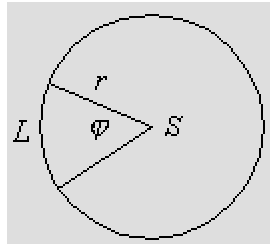
8. Zadane su dvije tetive na kruznici, i pripadajuci luk izmedju tetiva. Izracunaj kut pod kojim se tetive sjeku. $\overset{\frown}{AD} = 20°, \overset{\frown}{BC} = 70°, \overset{\frown}{BD} = 210°$

Iz definicije znamo: $x = \sphericalangle AVB = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow \qquad \overset{\frown}{AC} = 360 - \left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BD}\right)$

$\overset{\frown}{AC} = 360° - \left(20° + 70° + 210°\right) = 60° \Rightarrow \qquad x = \dfrac{60° + 210°}{2} = 135°$



9. Zadana je kruznica radijusa $r = 3$. Izracunaj duzinu luka koji pripada sredisnjem kutu od $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ radijana. Duzina luka se racuna: $L = r \cdot \varphi = 3 \cdot \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$

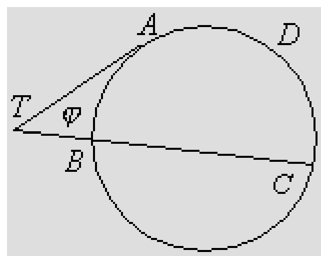


10. Izracunaj kut φ ako je zadan omjer lukova na kruznici: $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{ABC}=2:3:7$

Vrijednost za puni kut je : $2x+3x+7x=360° \qquad \Rightarrow x=30°$

$\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{ADC}=2\cdot 30°:3\cdot 30°:7\cdot 30° \Rightarrow \widehat{AB}=60°, \widehat{BC}=90°, \widehat{ADC}=210°$

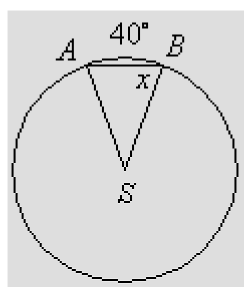
Po definiciji je: $\varphi=\dfrac{\widehat{ADC}-\widehat{AB}}{2}=\dfrac{210°-60°}{2}=75°$



11. Izracunaj kut x trokuta $\triangle ASB$, ako je zadan luk pripadajuce tetive $l=40°$. Vidi sliku.

Trokut $\triangle ASB$je istokracan, pa su oba kuta x, jednaka.

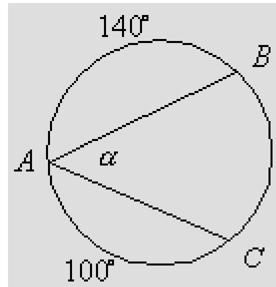
Iz trokuta $\triangle ABC$ imamo: $180°=2x+40° \Rightarrow 2x=140° \Rightarrow x=70°$



12. Zadana je kruznica i njene dvije tetive AB i AC koje zatvaraju luk od 140° i 100°.

Izracunaj kut α medju tetivama.

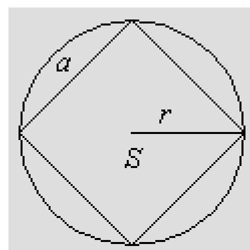
Obodni kut α :$\alpha=\dfrac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 360°=140+100+\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BC}=120° \Rightarrow \alpha=\dfrac{\widehat{\mathrm{BC}}}{2}=60°$



13. Zadana je kruznica polumjera $r = 4$ i upisani kvadrat. Izracunaj povrsinu izmedju kruznice i kvadrata.

Povrsina kruga: $P_{\bigcirc} = r^2\pi \Rightarrow P_{\bigcirc} = 4^2\pi = 16\pi$ Diagonala kvadrata: $d = 2r = 2 \cdot 4 = 8$

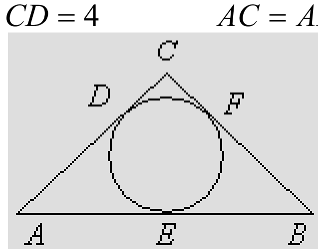
$P_{\square} = \frac{d^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32 \Rightarrow$ Razlika povrsina iznosi: $\triangle P = P_{\bigcirc} - P_{\square} = 16\pi - 32$



14. Zadana je kruznica i tri tocke iz kojih su povucene tangente na kruznicu. Duzine segmenata su: $\overline{CF} = 4$, $\overline{FB} = 5$ i $\overline{AB} = 9$. Izracunaj duzinu $\overline{AC}$.

Iz definicije znamo: $\overline{FB} = \overline{EB} = 5 \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 9 - 5 = 4$

$\overline{AE} = \overline{AD} = 4$ $\overline{CF} = \overline{CD} = 4$ $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD} = 4 + 4 = 8$



5.4 Poligoni – mnogokuti

Poligoni su geometrijski likovi sa tri i vise stranica i njima odgovarajucih kuteva. Poseban slucaj poligona su trokuti (koje tako i zovemo), cetverokuti (paralelogrami, kvadat, romb, trapez...) te mnogokuti u pravom smislu rijeci, sa brojem stranica $n = 5 \div$ beskonacno.

Zbroj unutrasnjih kuteva poligona jednak je: $\sum K_U = 180°(n-2)$

Zbroj vanjskih kuteva poligona iznosi: $\sum K_V = 360°$

Spajanjem sredisnjica stranica poligona dobije se novi poligon sa istim brojem stranica. U slucaju cetverokuta, novi cetverokut je paralelogram.

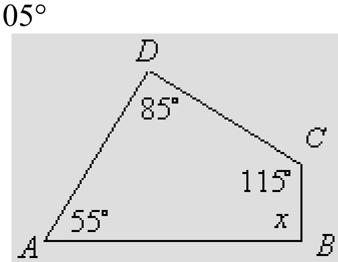
Dijadonale cetverokuta se prepolavljaju a dijagonale kvadrata i romba sjeku se pod pravim kutem.

1. Izracunaj kut x, ako su poznati podaci zadani na slici.

Suma svih unutarnjih kuteva cetverokuta iznosi: $\sum \mathrm{K}_{4\mathrm{U}} = 180°(n-2)$

$\sum \mathrm{K}_{4\mathrm{U}} = 180°(n-2) = 180°(4-2) = 360° \Rightarrow 360° = x + 55° + 85° + 115°$

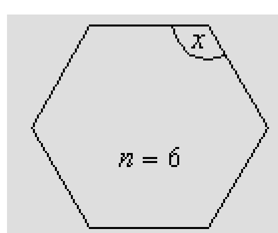
$360° = x + 255° \Rightarrow \quad x = 105°$



2. Izracunaj kut x, ako su poznati podaci zadani na slici.

Suma svih unutarnjih kuteva sesterokuta iznosi: $\sum \mathrm{K}_{6\mathrm{U}} = 180°(n-2)$

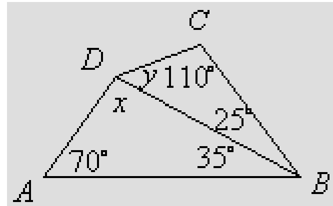
$\sum \mathrm{K}_{6\mathrm{U}} = 180°(n-2) = 180°(6-2) = 720° \Rightarrow 720° = 6x \Rightarrow x = \frac{720°}{6} = 120°$



3. Izracunaj kut x i y ako su poznati podaci zadani na slici.

Iz $\triangle ABD \;\Rightarrow\; 180° = x + 70° + 35° \Rightarrow x = 180° - 135° = 75°$

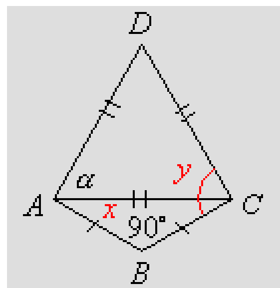
Iz $\triangle BCD \;\Rightarrow\; 180° = y + 110° + 25° \Rightarrow y = 180° - 135° = 45°$



4. Izracunaj kuteve x i y, ako su poznati podaci zadani na slici.

   Iz istostranicnog trokuta $\triangle ACD \Rightarrow \quad \alpha = 60°$

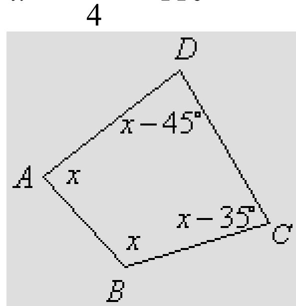
   Iz istoskracnog trokuta $\triangle ABC \Rightarrow \quad x = 45° \Rightarrow y = \alpha + x = 60° + 45° = 105°$



5. Izracunaj kut x, ako su poznati podaci zadani na slici.

   $\sum K_U = 360° \Rightarrow \; x + x + (x - 35) + (x - 45) = 360° \Rightarrow 4x - 80 = 360°$

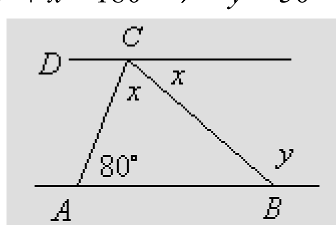
$$x = \frac{440°}{4} = 110°$$



6. Izracunaj kuteve x i y, ako su poznati podaci zadani na slici.

   Iz $AB \parallel CD \Rightarrow \qquad x + x + 80° = 180° \Rightarrow x = 50° \qquad y = x + 80° = 50° + 80° = 130°$

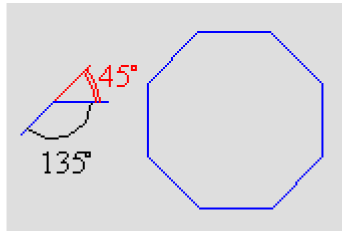
   Drugi nacin: $(180° - y) + 80° + x = 180° \Rightarrow \quad y = 50° + 80° = 130°$



7. Unutarnji kut poligona iznosi $\alpha = 135^{\circ}$. Izracunaj vanjski kut i odredi koji poligon je u pitanju.

   $\alpha_u = 135°$ $\quad \alpha_u + \alpha_v = 180° \alpha_v = 180° - 135° = 45°$

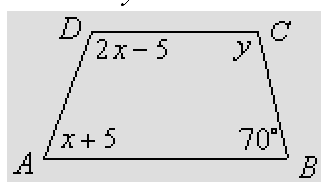
   Za poligon vrijedi: $\sum K_v = 360° \Rightarrow n \cdot 45° = 360° \Rightarrow n = 8$ osmerokut (oktagon)



8. Zadan je trapez prema slici. Izracunaj kuteve x i y.

   Stranice su paralelne: $AB \parallel CD$ pa imamo: $(2x-5)+(x+5)=180°$

   $y + 70° = 180°$ $3x = 180° \Rightarrow x = 60°$ $\quad y = 180° - 70° = 110°$



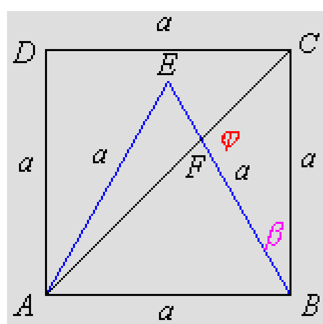
9. Zadani su kvadrat i istostranicni trokut prema slici. Izracunaj kut φ.

   Kutevi u trokutu $\triangle ABE$ iznose: $\angle ABE = 60°$; $\angle ABC = \angle BCD = 90°$

   Kut $\angle ACB$ iznosi: $\angle ACB = 45° \Rightarrow \beta = \angle ABC - \angle ABE = 90° - 60° = 30°$

   Iz trokuta $\triangle BCF$ imamo: $\beta + \varphi + \angle ACB = 180° \Rightarrow \beta + \varphi + 45^{\circ} = 180°$

   $\varphi = 105^{\circ}$

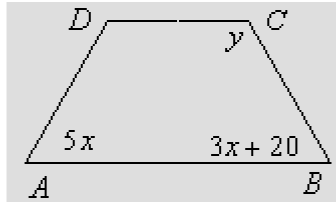


10. Zadan je jednakostranicni trapez. Izracunaj vrijednosti x i y.

    Jednakostranican trapez ima $\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow 5x = 3x + 20 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10°$

    Horizontalne stranice su paralelne, pa je: $AB \parallel CD \Rightarrow$ $\quad y + (3x+20) = 180°$

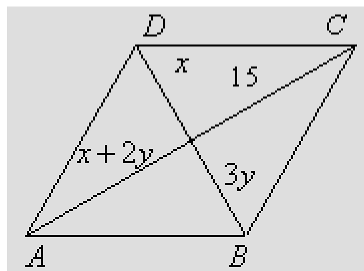
    $y = 180° - (30+20) = 130°$



11. Zadan je romb sa dijagonalama prema slici. Izracunaj nepoznanice x i y.

Dijagonala se sjeku u polovici njihovih duzina, pa se moze napisati:

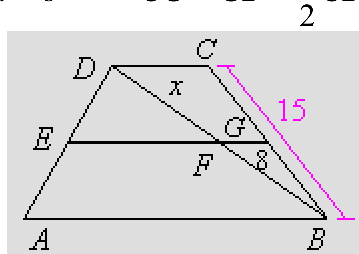
$$\left.\begin{array}{l} x+2y=15 \\ x \qquad = 3y \end{array}\right\} \Rightarrow 3y+2y=15 \Rightarrow y=3 \qquad x=3y=3\cdot 3=9 \Rightarrow x=9$$



12. Zadan je trapez prema slici. Izracunaj nepoznanice x i y.

Sredisnjica sjece dijagonalu na dva jednaka djela, pa se moze napisati:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \overline{DF} = \overline{FB} \Rightarrow x = 8 \qquad \overline{CG} = \overline{GB} = \frac{1}{2}\overline{CB} \Rightarrow y = \frac{15}{2} = 7.5$$



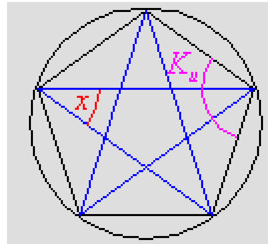
13. Zadana je lik u obliku zvijezde sa pet krakova. Izracunaj nepoznanicu x.

Zbroj unutarnjih kuteva poligona iznosi: $\sum K_u = 180°(n-2)$

$$\sum K_u = 180°(n-2) = 180°(5-2) = 540° \Rightarrow 5K_u = 540° \Rightarrow K_u = \frac{540°}{5} = 108°$$

Iz slike je vidljivo, dijagonale sjeku unutarnji kut na 3 jednaka djela:

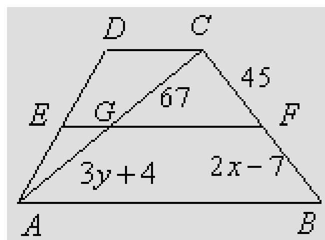
$$K_u = 3x \Rightarrow x = \frac{108°}{3} = 36° \Rightarrow K_u = 36°$$



14. Zadana je trapez prema slici. Izracunaj nepoznanice x i y.

Sredisnjica sjece dijagonalu i bocne stranice na dva jednaka djela.

$\overline{CF} = \overline{FB} \Rightarrow 2x - 7 = 45 \Rightarrow x = 26 \quad \overline{AG} = \overline{GC} \Rightarrow 3y + 4 = 67 \Rightarrow y = 21$



5.5 Povrsine likova, geometrijska tijela

Povrsina geometrijskih likova

Povrsina geometrijskih likova racuna se po znanom nacinu: sirina puta visina.

Citaoc mor sam definirati te dvije kategorije prilikom postave zadatka.

Za poligone - mnogokute vrijede slijedece: Povrsina poligona je sastavljena iz vise elementarnih djelova, obicno trokuta i moze se razviti u: trapez - ako je broj stranica neparan
paralelogram - ako je broj stranica paran

Na osnovu toga, povrsina poligona je jednaka:

$$P_P = \frac{O_P \cdot a}{2} \begin{cases} P_P = \text{Povrsina poligona} \\ \mathrm{O_P} = \text{Opseg poligona} \\ a = \text{okomita udaljenost stranice od sredista poligona(apothem)} \end{cases}$$

Za likove kojima je osnova kruznica, treba primijeniti pravilo za povrsinu kruga $r^2\pi$.

Geometrijska tijela

Volumen tijela se u pravilu racuna: povrsina baze puta visina.

Povrsina tijela se racuna tako, da se izracuna povrsina ploha tijela, koje su obicno geometrijski likovi (trokuti, krug, paralelogrami) i inda se te povrsine zbroje.

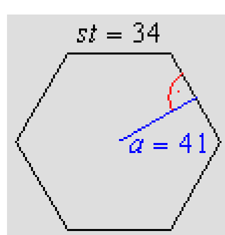
Volumen stozaca i piramida racuna se po jednadzbi: $\frac{1}{3}$povrsina baze puta visina.

Volumen kugle jednak je $\frac{2}{3}$ volumena valjka kome je visina jednaka promjeru:

$$V_K = \frac{2}{3}V_V = \frac{2}{3}r^2\pi \cdot h = \frac{2}{3}r^2\pi \cdot 2r = \frac{4}{3}r^3\pi \qquad V_K = \frac{4}{3}r^3\pi$$

1. Izracunaj povrsinu pravilnog sesterokuta, kome je najkraca udaljenost stranice od sredista opisane kruznice $a = 41$ cm a duzina stranice $st = 34$ cm.

   Opseg sesterokuta: $O = 6 \cdot st = 6 \cdot 34 = 204 \Rightarrow \qquad P_P = \frac{O_P \cdot a}{2} = \frac{204 \cdot 41}{2} = 4264cm^2$

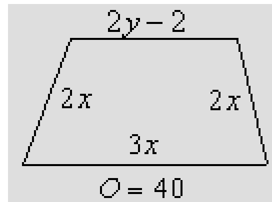


2. Izracunaj povrsinu zadanog paralelograma ako su poznate velicine prema slici.

$O = 2x + 2x + (2y - 2) + 3x = 7x + 2y - 2 \Leftrightarrow O = 40 = 7x + 2y - 2 \quad \Rightarrow \underline{7x + 2y = 42}$

Iz paralelograma imamo: $3x = 2y - 2 \Rightarrow \underline{3x - 2y = -2}$

Rjesenje jednadzbi iznosi: $x = 4 \qquad y = 7$



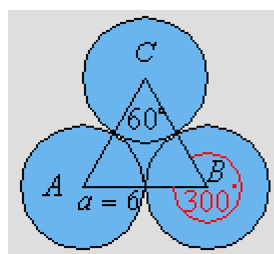
3. Izracunaj povrsinu zadanog kombiniranog lika.

Povrsina istostranicnog trokuta stranice $a = 6$ iznosi: $P_{\triangle} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

Povrsina kruznog isjecka, koji pripada luku $l° = 360° - 60° = 300°$, $r = \frac{a}{2}$:

$$P_{\measuredangle} = r^2\pi \cdot \frac{l°}{360°} = \left(\frac{6}{2}\right)^2 \pi \frac{300°}{360°} = \frac{9 \cdot 300°}{360}\pi = \frac{15}{2}\pi$$

Sveukupna povrsina lika iznosi: $\quad P = P_{\triangle} + 3P_{\measuredangle} = 9\sqrt{3} + 3\frac{15}{2}\pi = 9\sqrt{3} + \frac{45}{2}\pi$



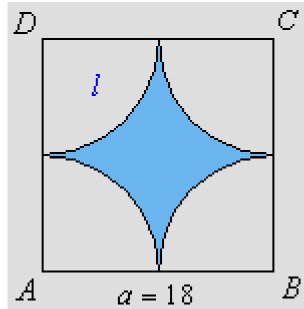
4. Izracunaj povrsinu zadanog kombiniranog lika.

Povrsina kvadrata stranice $a = 18$ iznosi: $P_{\square} = a^2 = 18^2 = 324$

Povrsina kruznog isjecka, koji pripada luku $l° = 90°$, $r = \frac{a}{2}$:

$$P_{\measuredangle} = r^2\pi \cdot \frac{l°}{360°} = \left(\frac{18}{2}\right)^2 \pi \frac{90°}{360°} = \frac{81 \cdot 90°}{360°}\pi = \frac{81}{4}\pi$$

Sveukupna povrsina lika iznosi: $\quad P = P_{\square} - 4P_{\measuredangle} = 324 - 4 \cdot \frac{81}{4}\pi = 324 - 81\pi$



5. Izracunaj povrsinu zadanog kombiniranog lika.

   Povrsina istostranicnog trokuta stranice $a = 12$ iznosi: $P_{\triangle} = a^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 12^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$

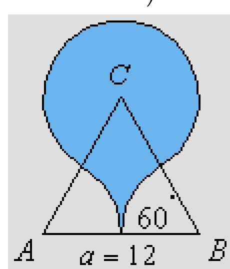
   Povrsina kruga radijusa $r = \dfrac{a}{2}$: $\quad P_{\bigcirc} = \left(\dfrac{12}{2}\right)^2 \pi = 36\pi$

   Povrsina kruznog isjecka, koji pripada luku $l° = 60°$, $r = \dfrac{a}{2}$; To su dvije neobojane i jedna obojana povrsina unutar trokuta.

   $$P_{\measuredangle} = r^2\pi \cdot \frac{l°}{360°} = \left(\frac{12}{2}\right)^2 \pi \frac{60°}{360°} = \frac{36 \cdot 60°}{360}\pi = 6\pi$$

   Sveukupna povrsina lika iznosi: Povrsina kruga radijusa r, plus povrsina trokuta umanjena za tri kruzna isjecka:

   $$P = P_{\bigcirc} + \left(P_{\triangle} - 3P_{\measuredangle}\right) = 36\pi + \left(36\sqrt{3} - 3 \cdot 6\pi\right) = 36\pi + 36\sqrt{3} - 18\pi = 36\sqrt{3} + 18\pi$$

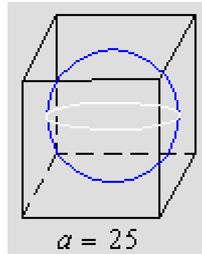


6. Nogometna lopta je u kutiji (kocka) sa stranicom $a = 25cm$, koji je jednak promjeru lopte. Koliki postotak volumena je oko lopte?

   Volumen kocke je: $V_k = a^3 = 25^3 = 15625cm^3$

   Volumen lopte je: $V_l = \dfrac{4}{3}r^3\pi = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{a}{2}\right)^3 \pi = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{25}{2}\right)^3 \pi = 8181.231cm^3$

   $$p_v = 100 \cdot \frac{V_k - V_l}{V_k} = 100 \cdot \frac{15625 - 8181.231}{15625} = 100 \cdot 0.4764 = 47.64\%$$



7. Silos ima oblik valjka koji ima na vrhu oblik polukugle radijusa $r = 4m$. Ukupna visina silosa je $h = 7.5m$. Izracunaj volumen silosa.

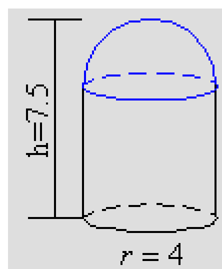
   Volumen silosa cine valjak i polukugla.

   Visina valjka je $h_v = h - r = 7.5 - 4 = 3.5m$ a baza ima $r = 4m$

   Volumen valjka iznosi: $V_v = r^2\pi \cdot h_v = 4^2\pi \cdot 3.5 = 56\pi\, m^3$

   Volumen polukugle iznosi: $V_{pk} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{2}\frac{4}{3}4^3\pi = \frac{4\cdot 64}{6}\pi = \frac{64}{3}\pi\, m^3$

   Volumen silosa iznosi: $V_s = V_v + V_{pk} = 56\pi + \frac{64}{3}\pi = 77.33\pi = 310m^3$



8. Keopsova piramida ima za bazu kvadrat sa stranicom duzine $a = 230.4\ m$ a visina piramide je $h = 147\ m$. Izracunaj priblizno koliko je kamenih blokova dimenzije $P_k = 2.3 \times 1.8\ m$ bilo potrebno za poplociti piramidu, ukljucujuci i bazu.

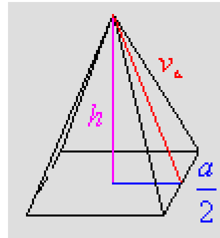
   Povrsina piramide iznosi: cetiri povrsine trokuta plus povrsina base:

   $P_P = P_\square + 4P_\triangle \Rightarrow P_\square = a^2 = 230.4^2 = 53084.160m^2$

   $$P_\triangle = \frac{b\cdot v_\triangle}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right) = \frac{230.4\sqrt{147^2+\left(\frac{230.4}{2}\right)^2}}{2} = 21514.982m^2$$

   $P_P = 4P_\triangle + P_\square = 4\cdot 21514.982 + 53084.160 = 139144.088m^2$

   Za poplociti piramidu trebalo je : $n = \frac{P_P}{P_k} = \frac{139144.088}{2.3\cdot 1.8} \doteq 33610$ kamenih blokova



v
h
a
2