

3. EKSPONENCIJALNE I LOGARITAMSKE JEDNADZBE

3.1 Eksponencijalne jednadzbe

U ovom dijelu ce biti obradjeno samo rjesavanje eksponencijalnih jednadzbi. vise o tome biti ce obradjeno u dijelu o funkcijama

1. $3^{x-2} = 5$ logaritmirajmo obje strane
 $(x-2)\log 3 = \log 5$
 $(x-2) = \frac{\log 5}{\log 3} \Rightarrow x = 2 + \frac{\log 5}{\log 3} = 2 + \frac{0.699}{0.477} = 3.465 \Rightarrow \underline{x = 3.465}$

2. $2 + (4^{x-1}) = 17^x$ logaritmirajmo obje strane
 $\log 2 + (x-1)\log 4 = x\log 17$
 $\log 2 + x\log 4 - \log 4 = x\log 17$
 $x\log 4 - x\log 17 = \log 4 - \log 2$
 $x(\log 4 - \log 17) = \log 4 - \log 2$
 $x = \frac{\log 4 - \log 2}{\log 4 - \log 17} = \frac{\log\left(\frac{4}{2}\right)}{\log 4 - \log 17} = \frac{\log 2}{\log 4 - \log 17} = -0.479 \Rightarrow \underline{x = -0.479}$

3. $3^{x+2} = 5^x$ logaritmirajmo obje strane
 $(x+2)\log 3 = x\log 5$
 $x\log 3 + 2\log 3 = x\log 5$
 $x\log 5 - x\log 3 = 2\log 3$
 $x(\log 5 - \log 3) = 2\log 3$
 $x = \frac{2\log 3}{\log 5 - \log 3} = \frac{2(0.30103)}{(0.699) - (0.477)} = 4.298 \Rightarrow \underline{x = 4.298}$

4. $6^{x+2} = 12^{x-1}$ logaritmirajmo obje strane
 $(x+2)\log 6 = (x-1)\log 12$
 $x\log 6 + 2\log 6 = x\log 12 - \log 12 \Rightarrow x\log 12 - x\log 6 = 2\log 6 + \log 12$
 $x(\log 12 - \log 6) = \log 12 + 2\log 6$

$$x = \frac{\log 12 + 2 \log 6}{\log 12 - \log 6} = \frac{(1.079) + 2(0.778)}{\log \frac{12}{6}} = \frac{2.635}{0.30103} = 8.753 \Rightarrow \underline{x = 8.753}$$

3.2 Logaritamske jednadzbe

U ovom dijelu ce biti obradjeno samo rjesavanje logaritamskih jednadzbi. vise o tome biti ce obradjeno u dijelu o funkcijama.

Po definiciji, logaritam je broj kojim treba potencirati bazu da se dobije odgovarajuci broj:

$$y = b^x$$

$$y = b^x \quad /_{\log} \quad \Rightarrow x \text{ je logaritam broja } y \text{ po bazi } b$$

$$\log_b y = x \log_b b \quad \Rightarrow \text{logaritam broja po vlastitoj bazi jednak je 1}$$

$$\log_b y = x \log_b b \quad \text{odnosno}$$

$$\underline{x = \log_b y}$$

Iz toga je moguće zaključiti, da su eksponencijalne i logaritamske funkcije usko povezane, odnosno, da su funkcije inverzne (vidi *Funkcije*)

1. Izrazi zadane izraze u eksponencijalnom i logaritamskom obliku:

$$3^2 = 9 \quad \text{izrazeno logaritamski} \quad 2 = \log_3 9$$

$$(64)^{\frac{1}{3}} = 4 \quad \text{izrazeno logaritamski} \quad \frac{1}{3} = \log_{64} 4$$

$$(32)^{\frac{3}{5}} = 8 \quad \text{izrazeno logaritamski} \quad \frac{3}{5} = \log_{32} 8$$

odnosno vrijedi i suprotno:

$$\log_2 32 = 5 \quad \text{izrazeno eksponencijalno} \quad 32 = 2^5$$

$$\log_6 \left(\frac{1}{36} \right) = -2 \quad \text{izrazeno eksponencijalno} \quad \frac{1}{32} = 6^{-2}$$

2. Iz zadane jednadzbe izrazi eksplicitno vrijednost t :

$$P = 75 \cdot e^{-0.005t}$$

$$\frac{P}{75} = e^{-0.005t} \quad /_{\log}$$

$$\log_e \left(\frac{P}{75} \right) = (-0.005t) \log_e e \Rightarrow \log_e e = 1 \Rightarrow \quad t = \frac{\log_e \left(\frac{P}{75} \right)}{-0.005}$$

3. Izrazi u drugacijem obliku: $3^3 = 27$, $4^4 = 256$, $2^{-6} = \frac{1}{64}$

$$3^3 = 27 \quad \swarrow_{\log}$$
$$3 \log_3 3 = \log_3 27 \Rightarrow \underline{3 = \log_3 27}$$

$$4^4 = 256 \quad \swarrow_{\log}$$
$$4 \log_4 4 = \log_4 256 \Rightarrow \underline{4 = \log_4 256}$$

$$2^{-6} = \frac{1}{64} \quad \swarrow_{\log}$$
$$-6 \log_2 2 = \log_2 \left(\frac{1}{64} \right) \Rightarrow \underline{-6 = \log_2 \left(\frac{1}{64} \right)}$$

4. Vrijednost bankovnog racuna za investiranih K sredstava uz 10% kamata na godinu data je izrazom: $V = K(1.1)^t$. Rijesi izraz po t .

$$V = K(1.1)^t$$

$$\frac{V}{K} = (1.1)^t \quad \swarrow_{\log_{1.1}}$$

$$\log_{1.1} \left(\frac{V}{K} \right) = t \log_{1.1} (1.1) \Rightarrow \log_{1.1} (1.1) = 1 \text{ po definiciji} \Rightarrow \underline{t = \log_{1.1} \left(\frac{V}{K} \right)}$$

5. Brzina rakete u momentu kada je gorivo potpuno nestalo, dana je jednadzvom

$$v = u \log_e \left(\frac{w_0}{w} \right), \text{ gdje je } u \text{ izlazna brzina plinova, } w_0 \text{ tezina goriva u trenutku paljenja,}$$

w tezina izgorenog goriva. Rijesi po w .

$$v = u \log_e \left(\frac{w_0}{w} \right) \Rightarrow \frac{v}{u} = \log_e \left(\frac{w_0}{w} \right) \Rightarrow e^{\frac{v}{u}} = \frac{w_0}{w} \Rightarrow w = \frac{w_0}{e^{\frac{v}{u}}}$$

$$\underline{w = w_0 e^{-\frac{v}{u}}}$$

6. Broj atoma N radioaktivnom radija u vremenu t dana je izrazom $\log_e \left(\frac{N}{N_0} \right) = -kt$

Pocetno stanje dano je sa N_0 . Rijesi jednadzbu po N .

$$\log_e \left(\frac{N}{N_0} \right) = -kt \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-kt} \Rightarrow \underline{N = N_0 e^{-kt}}$$